ANALIZA MATEMATICA CU PROGRAME TABELARE

Prof.dr.univ. Radu Gologan,
presedinte al Societatii de Stiinte Matematice din Romania

Softurile tabelare, construite in principal pentru analiza si gestionarea datelor din situatiile vietii cotidiene (economico-financiare, cuantificarea unor situatii, studiul de evolutie in modele etc.) pot fi utilizate in matematica, pentru exemplificarea unor fenomene ce descriu serii numerice sau in modele matematice ce se pot aproxima prin astfel de serii de date. In plus este o modalitate la indemana oricarui profesor de matematica, ca, fara programe speciale pentru calculator, sa atraga elevii spre frumusetea matematicii asistata de calculator.

In exemplul sugestiv ce urmeaza, si in alte note asemanatoare ce vor face obiectul numerelor urmatoare al revistei, vom deduce din datele numerice gestionate in Excel, comportamentul asimptotic al unui sir definit recurent, oferind astfel o baza experimentala pentru o demonstratie teoretica a rezultatului banuit astfel. In esenta, acesta este rolul simularii cu mijloacele informaticii moderne: a oferi informatii asupra unui posibil rezultat teoretic general.

Un program tabelar modern dispune de suficiente facilitati pentru a face astfel de studii numerice si grafice.

Iata exemplul: ne propunem sa studiem comportamentul la limita al sirului definit prin

$$x_1 = a,\; x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n$$

$$a_0 \cong\sim 0{,}10$$

Pentru n = 1, 2, 3, …, si eventual sa determinam dependenta acestui comportament fata de „data initiala” a > 0.

Vom folosi coloanele tabelului, de exemplu pana la linia 31 (acest numar poate varia in functie de problema si limita de calcul a softului ales). Pe coloana A vom genera numerele naturale 1, 2, 3, …, 31, de exemplu punand A1=1, A2=A1+1, si apoi copiind formula pana la linia 31. Vom incepe studiul cu A1=1, sirul x_n fiind generat pe coloana B.

Asezam data initiala a = 1 (pentru inceput) in B1 si in B2 formula pentru

$$x_2 = (1+1/B1)\text{^}A1$$

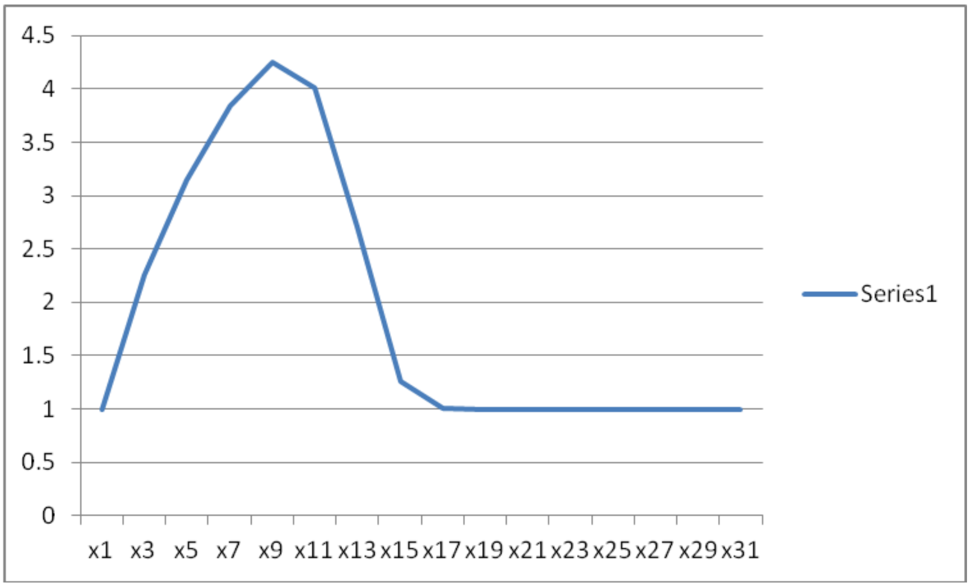
Copiem apoi formula pe toata coloana B si pe inca cateva coloane in care vom schimba pe rand data initiala din C1, D1, ...

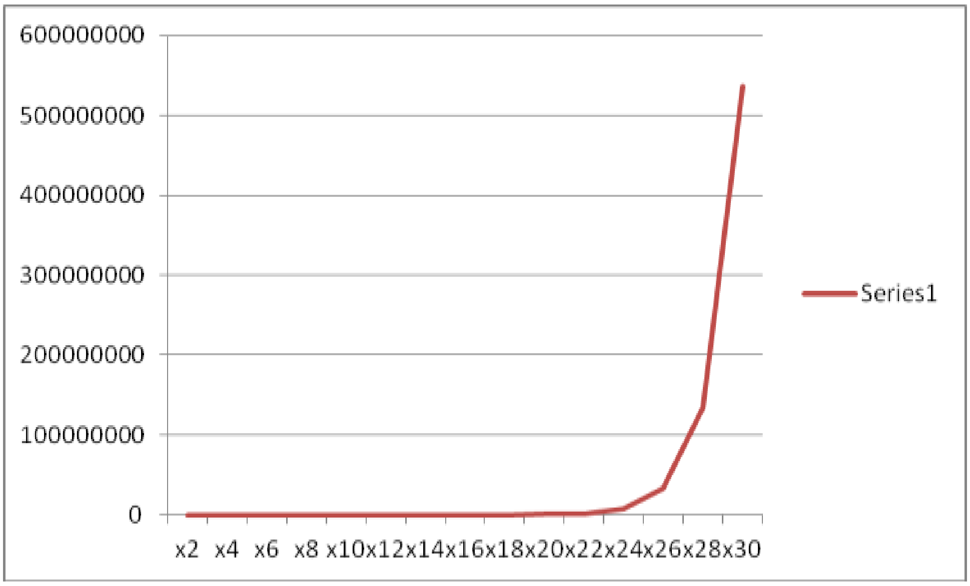
Cu „*Insert Charts*” putem vedea si grafic rezultatele.

A1 f_x 1

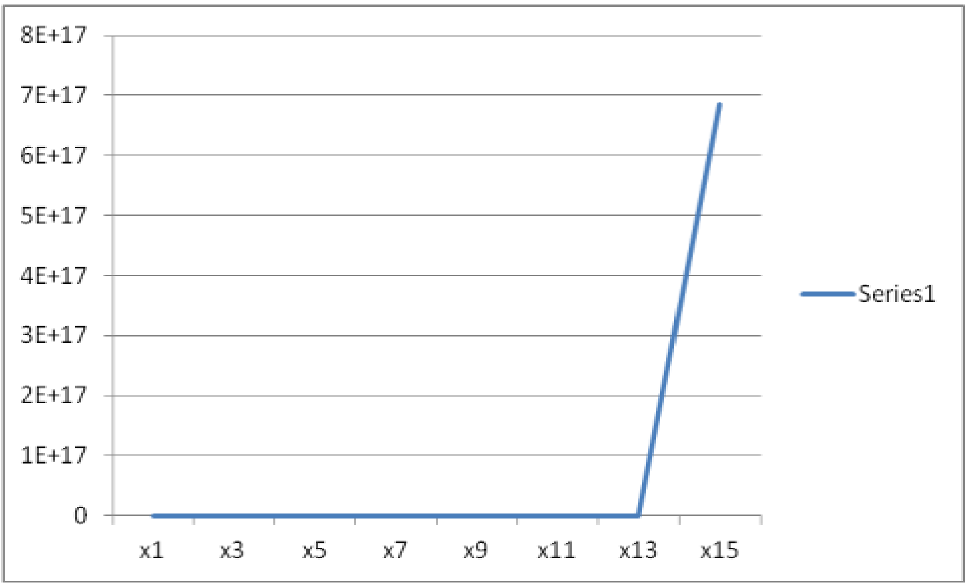
	A	B	C	D	E
1	1	1	2	0.1	0.2
2	2	2	1.5	121	1.196231199
3	3	2.25	2.777777778	1.012422272	8.46086E+31
4	4	3.013717421	1.997388494	6.741718644	1
5	5	3.146132865	3.398283368	1.318185879	107.0186662
6	6	3.97494184	2.251340483	6.810242459	1.012335618
7	7	3.843645946	4.31007937	1.361316572	107.649546
8	8	5.046648975	2.229948535	10.73865266	1.012666999
9	9	4.247107707	6.486488724	1.219631602	1597.337417
10	10	6.705641595	1.838489092	48.62122108	1.000763593
11	11	4.014991943	18.40176609	1.038138168	4.25E+14
12	12	11.54625585	1.236720543	246218.7673	1
13	13	2.709415156	936.0848829	1.000005023	#NUM!
14	14	59.37293543	1.002897055	6.1462E+281	#NUM!
15	15	1.263434691	6.85117E+17	1	#NUM!
16	16	6283.875267	1	#NUM!	#NUM!
17	17	1.002549241	#NUM!	#NUM!	#NUM!
18	18	128267.7135	#NUM!	#NUM!	#NUM!
19	19	1.000140341	#NUM!	#NUM!	#NUM!
20	20	523589.5388	#NUM!	#NUM!	#NUM!
21	21	1.000038199	#NUM!	#NUM!	#NUM!
22	22	2096311.057	#NUM!	#NUM!	#NUM!
23	23	1.000010495	#NUM!	#NUM!	#NUM!
24	24	8387595.658	#NUM!	#NUM!	#NUM!
25	25	1.000002861	#NUM!	#NUM!	#NUM!
26	26	33553231.88	#NUM!	#NUM!	#NUM!
27	27	1.000000775	#NUM!	#NUM!	#NUM!
28	28	134216324	#NUM!	#NUM!	#NUM!
29	29	1.000000209	#NUM!	#NUM!	#NUM!
30	30	536869288	#NUM!	#NUM!	#NUM!
31	31	1.000000056	#NUM!	#NUM!	#NUM!

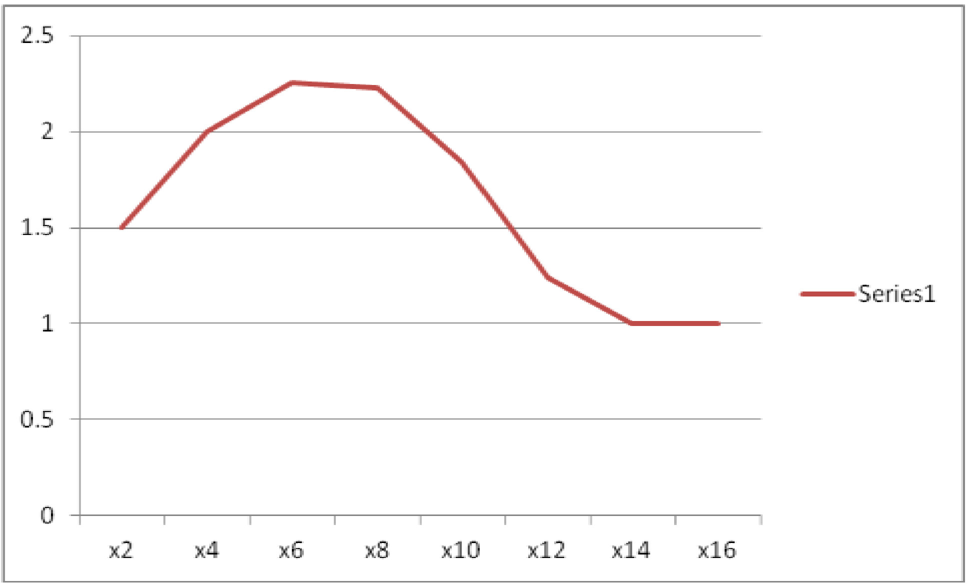
- Pentru a = 1 sirul numeric sustine ideea ca subsirul termenilor impari converge rapid la 1 iar cel al termenilor pari puternic crescator la infinit;
-



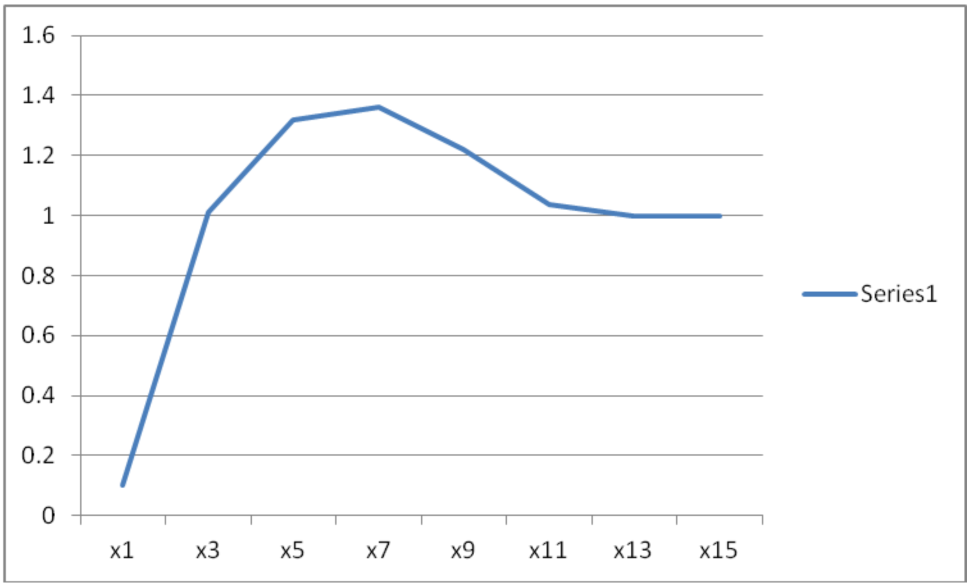


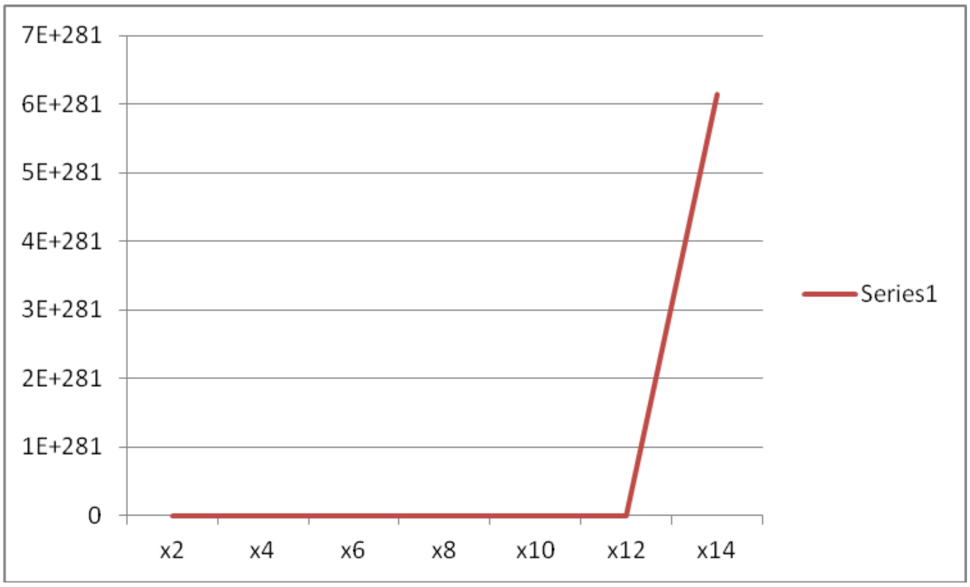
- Pentru a = 2, aceste fenomene se accentueaza, in sensul ca cele doua convergente de mai sus sunt mai rapide;



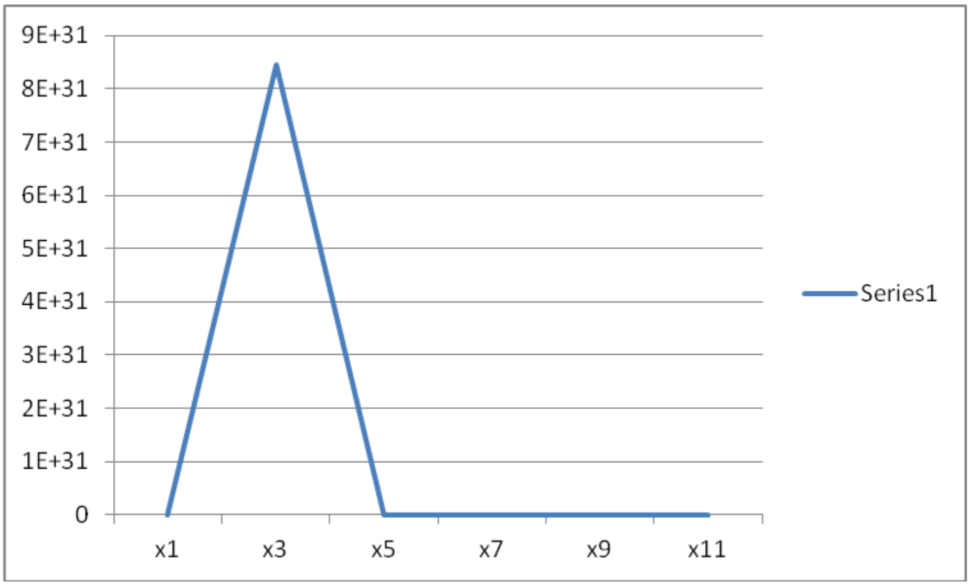


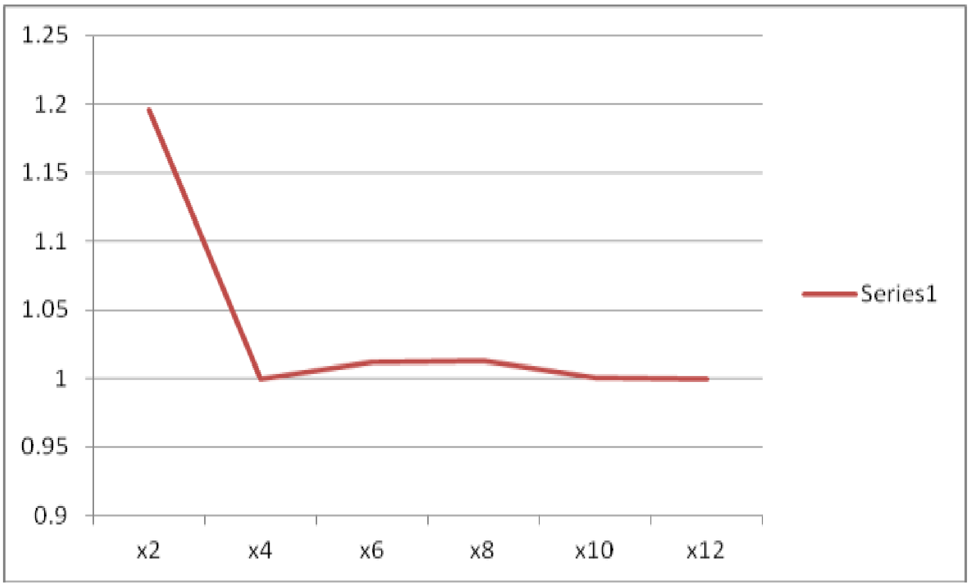
- Pentru a = 0,1 se produce o schimbare: sirul termenilor pari converge la 1 si al celor impari la infinit





- Pentru a = 0,2 se remarca acelasi comportament ca cel pentru a = 1, iar prin incercari successive (coloane noi, formula copiata si date initiale schimbate), rezulta ca probabila tranzitie de faza, adica schimbarea brusca a comportamentului sirului se produce pentru o valoare *a* care cu doua zecimale exacte este *a* = 0,10.





Urmeaza faza demonstratiei teoretice a rezultatelor justificate de calcule numerice ce va apartine matematicianului, si anume:

Teorema: Pentru sirul definit prin

$$x_1 = a, x_{n+1} = (1 + {}^{1}\!/_{x_n})^n$$

Exista un numar real $a_0 \approx 0{,}10$ *cu urmatoarea proprietate:*

- *Pentru* $a \in (0, a_0)$ *sirul* x_{2n} *tinde la infinit iar sirul* x_{2n+1} *converge la 1;*
- *Pentru* $a \in (a_{0,\infty})$ *sirul* x_{2n} *converge la 1 iar sirul* x_{2n+1} *tinde la* ∞*;*

Acest fapt a fost demonstrat de fapt, intr-o lucrare publicata in 1990 de matematicianul roman Ciprian Foias.

Invit cititorii sa foloseasca acest mod de anliza pentru studiul altor siruri, mai mult sau mai putin elementare. In situatiile in care raspunsul teoretic nu poate fi intuit, se vor putea obtine suficiente informatii numerice pentru a ajuta tratarea teoretica. Profesorii de matematica au mai sus un model prin care ii pot atrage pe elevii pasionati de informatica spre studiul analizei matematica fara a avea resurse speciala informatice.