O privire asupra examenului de definitivat

Prof. Tănasie Elena

Examenul de definitivat... Un examen greu de uitat pentru orice cadru didactic și destul de dificil mai ales pentru cine dorește o notă mare. Cu ajutorul „prietenului” Google, am „aruncat” o privire mai atentă asupra subiectelor din cadrul acestui examen. Concluzia? Ar putea fi una subiectivă așa că mă opresc asupra statisticilor: examenul de definitivat a fost examen național până în 1990, apoi fiecare centru universitar (București, Iași, Cluj, Craiova, Brașov, Timișoara) și-a organizat independent acest examen. Totuși, în anul 1992, subiectele au fost unice pe țară, apoi, până în 2011, centrele universitare au avut autonomie. Anul 2012 este anul în care examenul de definitivat devine examen național. Supun atenției subiectele din sesiunile 1992 și 2012.

1992 – Examen de definitivat

I. Fie $p \geq 5$ un număr prim. Se definește prin recurență șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0 \in \mathbb{Z}_p \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}$ și $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că șirul este bine definit și satisface condiția $x_{n+3} = x_n$, pentru orice $n \geq 0$;

b) Folosind eventual punctul precedent să se discute în funcție de p dacă ecuația

$x^2 - x + 1 = 0$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$.

Soluție:

a) Pentru ca șirul să fie bine definit trebuie să arătăm că operațiile din relația de recurență sunt totdeauna posibile.

Într-adevăr $\frac{1}{x_n} = x_n^{-1}$ există pentru orice $x_n \in Z_p$ dacă $x_n \neq \hat{0}$ deoarece Z_p este corp.

În plus trebuie ca $x_n^{-1} \neq \hat{1}$ deoarece altfel $x_{n+1} = \hat{0}$ și x_{n+2} nu poate fi definit. Cum $X_0 \neq \hat{1}$ și cum doar $\hat{1}$ are ca invers pe $\hat{1}$ rezultă că toate elementele diferite de $\hat{0}$ *și* $\hat{1}$ au inversele în $\{\hat{2}, \hat{3}, \dots \widehat{p-1}\}$.

Deci opusele lor fac parte din $\{\widehat{p-2}, \widehat{p-3}, \dots \hat{1}\}$, iar $1 - \frac{1}{x_n}$ poate lua valori doar din mulțimea $\{\widehat{p-2}, \widehat{p-3}, \dots \hat{2}\}$. Rezultă că $x_1 \in \{\hat{2}, \hat{3}, \dots \widehat{p-1}\}$ și raționamentul se efectuează pentru $x_2, x_3, \dots$.

Deci $x_n^{-1} \neq 1$ și rezultă că șirul este bine definit.

Periodicitatea:

$$x_{n+3} = 1 - \frac{1}{x_{n+2}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x_{n+1}}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x_n}}} = \frac{1}{1-\frac{x_n}{x_{n-1}}} = 1 - \frac{x_n-1}{x_n-1-x_n} = x_n\,,$$

$$\forall\, n \geq 0$$

b) Ecuația $x^2-x+1=0$ este echivalentă cu $x = 1 - \frac{1}{X}$ adică o relație asemănătoare cu relația de recurență de la punctul a).

Trebuie verificat dacă șirul de la punctul a) cu perioada 3 poate fi un șir constant $x_0=x_1=x_2=\ldots x_n=\ldots$.

Pentru n=5, alegând pe rând $x_0 \in \{\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ obținem șirul $\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \ldots$ Deci în $\mathbb{Z}_5$ ecuația nu are soluții.

Pentru n=7, $x_0 \in \{\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ obținem șirurile $\hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6} \ldots$; $\hat{3}, \hat{3}, \hat{3}, \ldots$; $\hat{4}, \hat{6}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{2}, \ldots$; $\hat{5}, \hat{5}, \hat{5}, \ldots$; $\hat{6}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{2}, \hat{4}, \ldots$ Deci în Z_7 ecuația are rădăcinile $\hat{3}$ și $\hat{5}$.

Pentru n=11, $x_0 \in \{\hat{2}, \hat{3}, \ldots, \widehat{10}\}$ nu vom obține șiruri constante, deci în $\mathbb{Z}_{11}$ ecuația nu are soluții.

Din aceste cazuri particulare putem intui că pentru p=M3+2 ecuația nu are soluții și pentru p=M3+1 ecuația are soluții.

Putem, mai departe, să aflăm numărul soluțiilor pentru p=M3+1 utilizând următoarea teoremă:

În orice corp comutativ, orice ecuație de forma $ax^2+bx+c=0$ are cel mult două rădăcini.

Rezultă, deci, că mai mult de două elemente nu pot genera șiruri constante. În consecință în $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{23}$, … ecuația nu are soluții, iar în $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_{19}$, … ecuația are două soluții.

II. Să se calculeze numerele reale t pentru care:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x + t\cos x|dx = 1$.

Stabilim semnul expresiei E(x)= $\sin x + t\cos x$

E(x)=0 $\Leftrightarrow \sin x + t\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -t$

Ecuația $\operatorname{tg} x = -t$ are soluții în $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dacă t< 0 și, în acest caz, $x_0=\operatorname{arctg}(-t)$ este soluția sa.

Avem : $I = \int_0^{x_0}(-\sin x - t\cos x)dx + \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + t\cos x)dx = (\cos x - t\sin x)\Big|_x^{x_0} + (-\cos x + t\sin x)\Big|_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} = \cos x_0 - t\sin x_0 - 1 + t + \cos x_0 - t\sin x_0$

Rezultă $2\cos x_0 - 2t\sin x_0 + t - 1 = 1$.

Cum $\cos x_0 = \cos(\operatorname{arctg}(-t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ și $\sin x_0 = \sin(\operatorname{arctg}(-t)) = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}$ rezultă ecuația $\frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$=2-t $\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+1} = 2 - t \rightarrow 4(t^2+1) = 4 - 4t + t^2 \Leftrightarrow$ $3t^2$+4t=0, deci t_1=0 , t_2=$-\frac{4}{3}$

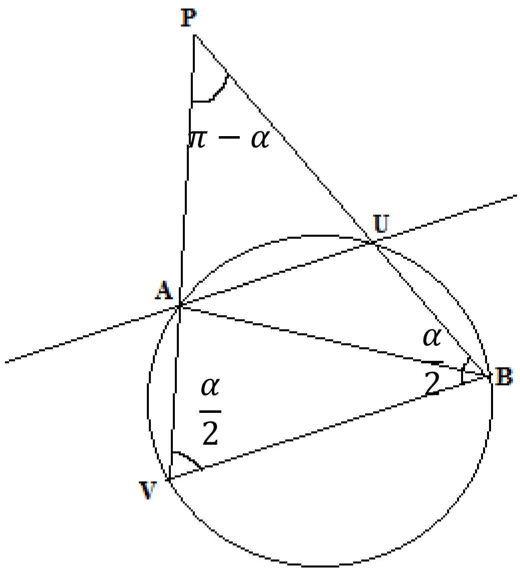
III. Fie Γ un cerc și A,B două puncte pe Γ astfel încât AB să nu fie un diametru în cerc. Dreapta variabilă „d” prin A intersectează cercul în U, iar dreapta d\` paralelă cu d care trece prin B intersectează cercul în V. să se determine locul geometric al intersecției dreptelor AV și BU.

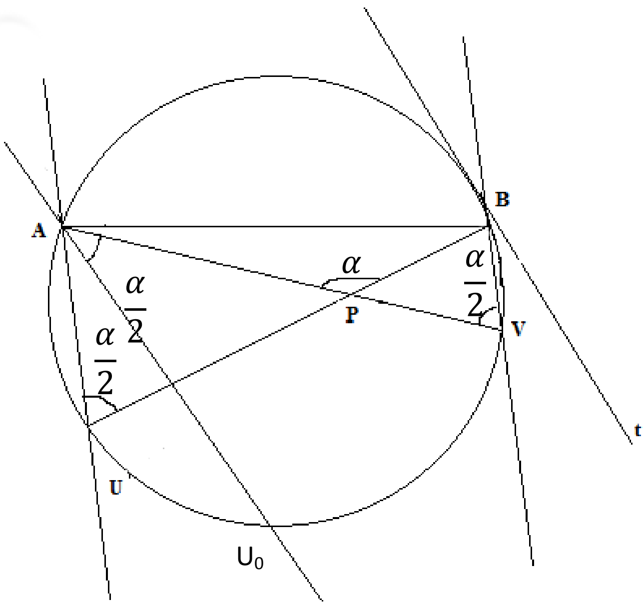
Soluție:

Notăm $\mathrm{m}(\widehat{AB}) = \alpha\ (cercul\ mic)$

Atunci $\mathrm{m}(\widehat{PVB}) = \mathrm{m}(\widehat{PBV}) = \frac{\mathrm{m}(\widehat{AB})}{2} = \frac{\alpha}{2}$ și deci $\mathrm{m}(\widehat{VPB}) = \pi - \alpha = constant.$

Rezultă că P se află pe arcul de cerc capabil de unghiul $\pi - \alpha$ când U se deplasează pe arcul AB de la B la A, punctul P descrie jumătate din arcul menționat. Acesta este rezultatul pentru U aparținând arcului mic AB. Pentru U pe arcul mare AB avem figura următoare.





Avem $\mathrm{m}(\widehat{AUB}) = \mathrm{m}(\widehat{BVA}) = \mathrm{m}(\widehat{PAU}) = \frac{\alpha}{2}$, ținând cont că AU||BV. Rezultă că $\mathrm{m}(\widehat{APB}) = \alpha$, deci P descrie un arc de cerc. Dacă U se găsește pe arcul AU, unde U_0 este punctul în care AU_0 este paralelă cu tangenta la cerc dusă în B, punctul P „ se mișcă” pe arcul complet de sub segmentul AB. Dacă U trece de U_0, P completează jumătatea care lipsea în prima figură.

IV. Să se arate că funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & , pentru\ x \neq 0 \\ 0\ , pentru\ x = 0 \end{cases}$, nu este monotonă în nici un interval I care conține numărul real zero.

Soluție:

Este suficient să găsim 3 puncte, fie acestea 0$< x_1 < x_2$ astfel încât $0 < f(0) < f(x_1)$, dar $f(x_1) > f(x_2)$.

Dacă I=(a,b) cu $a < 0$ și $b > 0$ alegem. $x_1 = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ și $x_2 = \frac{1}{2n\pi}$, n$\in \mathbb{N}^*$

Evident $0 < x_1 < x_2$.

Avem $f(x_1) = \frac{1}{(4n+1)\pi} + \frac{4}{(4n+1)^2\pi^2}\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(4n+1)\pi+4}{(4n+1)^2\pi^2}$

$$f(x_2) = \frac{1}{4n\pi} + \frac{1}{4n\pi^2}\sin(2n\pi) = \frac{1}{4n\pi}$$

Verificăm $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\frac{(4n+1)\pi + 4}{(4n+1)^2\pi^2} > \frac{1}{4n\pi} \to 4n(4n\pi + \pi + 4) > (16n^2 + 8n + 1)\pi \to 16n - 4n\pi > \pi \Rightarrow$$

$n > \frac{\pi}{16-4\pi}$ adevărat.

V. Exemple și contraexemple în predarea noțiunii de șir convergent.

2012 – Examen de definitivat

I.

1) Se consideră polinomul $f = x^4 + \hat{2}x^2 + x + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$
   a) Arătați că f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[x]$
   b) Dați exemplu de polinom g$\in \mathbb{Z}_3[x]$, ireductibil în $\mathbb{Z}_3[x]$ și care are aceeași funcție polinomială cu f.

Soluție:

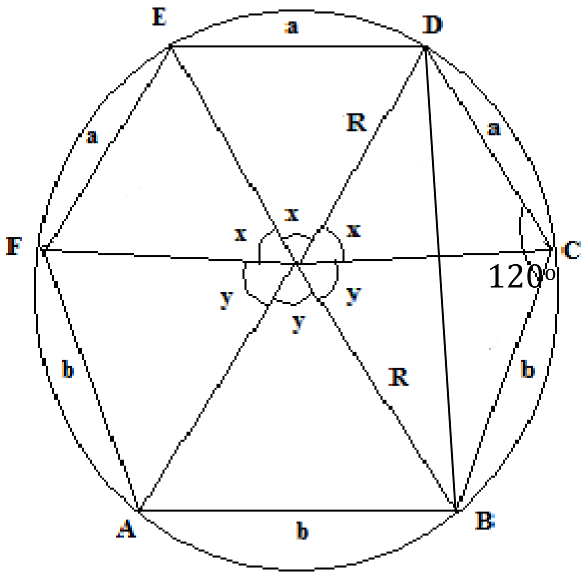
a) Cum $f(\hat{1}) = \hat{0} \Rightarrow f\ este\ reductibil$ în $\mathbb{Z}_3[x]$
b) Considerăm polinomul $g = x + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$
   $f(\hat{0}) = g(\hat{0}) = \hat{2}$
   $f(\hat{1}) = g(\hat{1}) = \hat{0}$
   $f(\hat{2}) = g(\hat{2}) = \hat{1}$. Deci $\tilde{f} = \tilde{g}$ și evident g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[x]$.

2) Un hexagon inscriptibil are trei laturi de lungime a și trei laturi de lungime b.

a) Arătați că hexagonul are un unghi cu măsura de 120^o .

b) Calculați, în funcție de a și b, raza cercului circumscris hexagonului.

Soluție:



a) Fără a restrânge generalitatea, alegem AB=AC=AF=b și CD=DE=EF=a.

Avem $\mathrm{m}(\widehat{AOB}) = \mathrm{m}(\widehat{BOC}) = \mathrm{m}(\widehat{AOF}) = y$

$\mathrm{m}(\widehat{COD}) = \mathrm{m}(\widehat{DOE}) = \mathrm{m}(\widehat{EOF}) = x$. Rezultă x+y=$120^o$ și

$$\mathrm{m}(\widehat{BCD}) = \frac{\mathrm{m}(\widehat{BFD})}{2} = \frac{2x+2y}{2} = \frac{240^o}{2} = 120^o$$

b) Aplicând teorema cosinusului în Δ-ul BCD, avem

$$\cos 120^o = \frac{a^2+b^2-BD^2}{2ab} \Rightarrow BD^2 = a^2 + b^2 + ab$$

Și în Δ-ul BOD, avem $\cos 120^o = \frac{2R^2-BD^2}{R^2} \Rightarrow BD^2 = 3R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+ab}{3}}$.

3. Pentru fiecare n∈ℕ* se consideră funcția $f_n\colon R \to R, f_n(x) = x^n \operatorname{arctg} x$.

a) Determinați k ∈ℕ pentru care graficul funcției f_k are asimptotă spre $+\infty$

b) Arătați că $(n+1)\int_0^1 f_n(x)dx + (n-1)\int_0^1 f_{n-2}(x)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, pentru orice n ∈ℕ, n≥ 3

Soluție:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_k(x)}{x}=+\infty,\forall k\geq 2$$

deci graficul funcției nu are asimptotă spre $+\infty$.

Pentru k=1,

$$\mathrm{m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{și } n=\lim_{x\to+\infty}x(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{l'H}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1\Rightarrow n=-1$$

Dreapta y=$\frac{\pi}{2}x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

În concluzie f_k are asimptotă spre $+\infty$ dacă și numai dacă k=1.

b)

$(n+1)\int_0^1 f_n(x)\,dx+(n-1)\int_0^1 f_{n-2}(x)\,dx=$

$\int_0^1((n+1)x^n+(n-1)x^{n-2})\operatorname{arctg}x\,dx=\int_0^1(x^{n+1}+x^{n-1})'\operatorname{arctg}x\,dx=$

$(x^{n+1}+x^{n-1})\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^{n-1}(x^2+1)}{(x^2+1)}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{x^n}{n}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$

II. Elaborați un item de tip întrebare structurată prin care să evaluați trei dintre competențele specifice precizate în următoarea secvență a programei școlare de matematic pentru clasa a IX-a :

Competențe specifice	Conținuturi
1. Diferențierea, prin exemple, a variației liniare de cea pătratică. **2. Completarea,** unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea **3. Aplicarea** unor algoritmi pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea (prin puncte semnificative) **4. Exprimarea** proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice **5. Utilizarea** relațiilor lui Viete pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații **6. Identificarea** unor metode grafice de rezolvare a ecuațiilor sau sistemelor de ecuații	**Funcția de gradul al II-lea** • Reprezentarea grafică a funcției f:ℝ→ℝ, $f(x)=ax^2+bx+c$, unde a, b, c ∈ ℝ , a≠0, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația f(x)=0, simetria față de drepte de forma x=m, cu m ∈ ℝ • Relațiile lui Viete, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases}x+y=s\\ xy=p\end{cases}$, cu s,p ∈ ℝ

III. Formele educației (educația formală, educația nonformală, educația informală): definirea, analiza și interdependența conceptelor.