ELEMENTE DE LOGICĂ

Profesor Florea Adrian
Şcoala Gimnazială „Avram Iancu"
Bucureşti

Filosofii antici, în special Platon şi Aristotel au descoperit legile gândirii logice. Încă din vremea lor s-au dat definiţii, s-au făcut clasificări, s-au definit operaţiile gândirii. Lumea înconjurătoare este alcătuită din obiecte materiale şi fenomene. Oamenii încearcă continuu să cunoască obiectele văzute şi nevăzute ale naturii, să înţeleagă fenomenele, să descopere legile care stau la baza producerii lor şi să le folosească în scopul dezvoltării tehnologice. Formele prin care pot cunoaşte lumea înconjurătoare sunt:

Senzaţiile – acestea sunt forma primară, directă, sub care percepem obiectele şi însuşirile lor, din mediul înconjurător. Ele sunt imagini pe care le percepem în legătură cu un obiect sau cu un fenomen. Această percepţie se face prin simţuri: văz, auz, tactil, miros.

Reprezentările - sunt imagini pe care ni le facem în mintea noastră despre obiectele din lumea înconjurătoare în absenţa acestora, realizate pe baza unui proces psihic în care participă memoria şi imaginaţia. Cunoaşterea lumii înconjurătoare se face prin senzaţii şi reprezentări cu ajutorul *gândirii*.

Gândirea - este procesul de percepere şi interpretare generalizată a realităţii, având la bază senzaţiile şi activitatea practică şi social-isorică a omului. Gândirea reflectă însuşirile generale, esenţiale şi raporturile existente între lucruri (obiecte) şi fenomene. Ea este a doua treaptă a cunoaşterii, treapta logică, raţională. Gândirea corectă are proprietatea de a transmite mai departe informaţiile nedeformate. Această gândire este gândirea logică.

Spunem că omul este înzestrat cu ***raţiune***, adică însuşirea de a gândi logic, de a înţelege legăturile şi sensul interacţiunilor dintre lucruri şi fenomene. Legile logice sunt creaţii ale geniului uman, în dezvoltarea lui social-istorică. Contribuţii deosebite au avut Aristotel, care în opera sa *Organon* tratează logica deductivă ; Teofrast, care împreună cu alţi filosofi deschide drumul logicii matematice ; Bacon şi Mill, creatorii logicii inductive.

Operaţiile gândirii

1. ***Generalul*** - constă din însuşirile care sunt comune tuturor obiectelor sau fenomenelor care fac parte din aceeaşi categorie. Exemplu: un triunghi este gândit, în general, ca poligon cu trei laturi, indiferent de lungimile laturilor sau de măsurile unghiurilor.

2. ***Individualul*** - constă din însuşirile pe care le are un obiect sau un fenomen şi care îl deosebesc de alte obiecte sau fenomene. Exemplu: un triunghi are laturile cu anumite lungimi, unghiurile cu o anumită măsură, deosebindu-se de alt triunghi care are alte dimensiuni.

3. ***Analiza*** - este o oparaţie a gândirii logice care constă în descompunerea (mintală) a lucrurilor sau fenomenelor, în părţile lor componente pentru a fi studiate fiecare în parte, desprinzând diferite însuşiri ale acestora.
4. ***Sinteza*** - este o operaţie a gândirii logice care constă în unirea (mintală) într-un întreg a însuşirilor părţilor unui obiect sau fenomen, pentru înţelegerea lui în ansambu.

Analiza şi sinteza pun în evidenţă raporturile care leagă între ele părţile componente ale unui întreg.

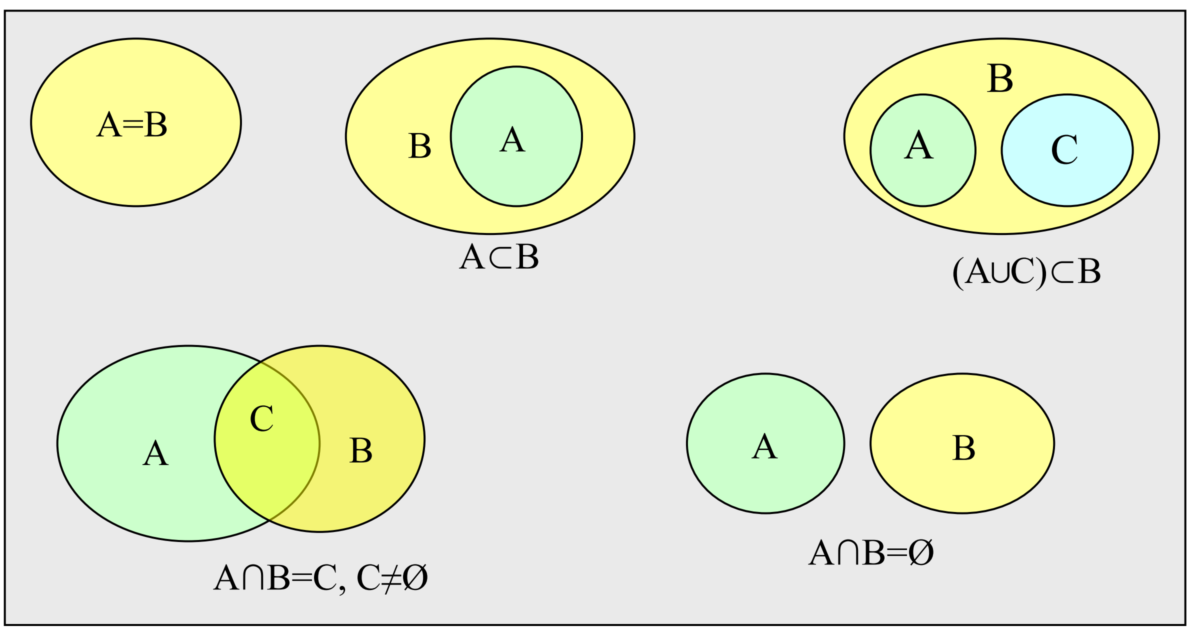
În procesul gândirii, oamenii operează cu noţiuni şi cu ajutorul limbajului. Formarea noţiunilor se face prin două operaţii logice: *abstractizarea* şi *generalizarea*.

- ***Abstractizarea*** este operaţia logică de punere în evidenţă a proprietăţilor generale, comune unei mulţimi de obiecte.
- ***Generalizarea*** este operaţia logică prin care însuşirile comune unui grup de obiecte sunt extinse mintal asupra tuturor obiectelor din aceeaşi categorie.

Dar ce este *noţiunea* ?

- ***Noţiunea*** este forma logică care cuprinde însuşirile generale şi esenţiale ale unei clase de obiecte.

Orice noţiune este formată din două părţi: ***conţinutul*** noţiunii şi ***sfera*** noţiunii. Exprimând o noţiune printr-un cuvânt , sfera noţiunii este mulţimea obiectelor care sunt denumite de acel cuvânt, iar conţinutul noţiunii este totalitatea însuşirilor generale şi esenţiale ale obiectelor ce poartă denumirea respectivă. Între sferele noţiunilor, matematicianul Leonard Euler (1707-1783) a clasificat următoarele raporturi:



1. - <u>Raport de identitate, A=B (noţiune-concept).</u>
2. - <u>Raport de subordonare a lui A faţa de B. A⊂B.</u>

De exemplu: mulţimea numerelor întregi este subordonată mulţimii numerelor raţionale; mulţimea trapezelor este subordonată mulţimii patrulaterelor.

3. - <u>Raport de cosubordonare $(A \cup C) \subset B$.</u>
De exemplu: patrulaterele şi triunghiurile sunt cosubordonate poligoanelor; mulţimea numerelor întregi negative şi mulţimea numerelor naturale sunt cosubordonate mulţimii numerelor raţionale.
4. - <u>Raport de încrucişare $A \cap B = C$, $C \neq \emptyset$.</u>
De exemplu: pătratul este rombul cu un unghi drept, dar şi dreptunghiul cu laturile congruente; mulţimea multiplilor lui 6 este în raport de încrucişare a mulţimii multiplilor lui 2 şi mulţimii multiplilor lui 3.
5. - <u>Raport de excludere $A \cap B = \emptyset$.</u>
De exemplu: mulţimile puterilor numerelor prime diferite sunt în raport de excludere.

Când se enunţă definiţii, în special la geometrie, foarte important este cazul (2), cazul de subordonare al sferelor.

Dacă notăm noţiunea care are sfera A cu N_A şi noţiunea care are sfera B cu N_B şi $A \subset B$, atunci noţiunea N_A se numeşte ***specie*** a noţiunii N_B. Noţiunea N_B se numeşte ***gen*** al noţiunii N_A.
Exemplu: Dreptunghiul este specie pentru paralelogram, iar paralelogramul este gen pentru dreptunghi. La rândul său, un gen poate constitui specie pentru o noţiune cu sfera mai extinsă. În exemplul de mai sus, paralelogramul este specie pentru patrulater.

Pentru rigoare şi eliminarea ambiguităţilor în legătură cu o noţiune, se folosesc *definiţiile.*

Într-o definiţie pot apărea mai multe categorii: genul specia, diferenţa specifică, propriul şi accidentalul.
Exemplu: Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.

<u>Genul</u>- este exprimat prin cuvântul “paralelogram”. Genul trebuie să fie cel mai apropiat de specia respectivă. Acest gen se numeşte *genul proxim.*

<u>Specia</u>- este exprimată prin cuvântul “dreptunghi”.

<u>Diferenţa specifică</u>- este precizată prin proprietatea de a avea un unghi drept.
Prin definiţie se exclude **<u>propriul</u>** (diagonale congruente) şi se exclude şi **<u>accidentalul</u>** (de exemplu că laturile au o anumită lungime).

Plecând de la definiţie se demonstrează proprietăţile. În cazul exemplului nostru, dreptunghiul are toate proprietăţile genului (paralelogramului) şi în plus are proprietăţi specifice (proprii), care îl diferenţiază ca specie: toate unghiurile sunt congruente, diagonalele sunt congruente.

Dintre greşelile care apar la reproducerea unei definiţii amintim:
- omiterea diferenţei specifice: “Dreptunghiul este un paralelogram”.
- nefolosirea genului proxim: “Dreptunghiul este patrulaterul cu un unghi drept”.
- folosirea unei proprietăţi specifice în locul diferenţei specifice: “dreptunghiul este paralelogramul cu diagonalele congruente”.

Poate fi acceptată ca definiţie, dar în acest caz proprietatea de a avea un unghi drept ar intra în cadrul propriului.

Pentru a stabili relaţii între noţiuni, pentru a pune în evidenţă şi a descoperi proprietăţi, oamenii fac *judecăţi*.

Judecata este forma logică prin care se afirmă (sau se neagă) ceva despre ceva. Judecăţile se exprimă prin propoziţii. Propoziţiile matematice au un sens mai larg decât cele în sens gramatical. În general, propoziţia în sens logic, matematic, este un enunţ despre un obiect sau o mulţime de obiecte, sau despre proprietăţile acestora, care, cu certitudine, este adevărat sau fals. Exemplu: "toate numerele naturale în care suma cifrelor este multiplu al lui trei, sunt divizibile cu trei" (A); "toate numerele prime sunt impare" (F); "toate numerele impare sunt prime" (F).

Judecăţile pot fi clasificate astfel:

1. **<u>Judecăţi universal afirmative</u>**:
   Exemplu: "Toate triunghiurile isoscele au două unghiuri congruente".

2. **<u>Judecăţi universal negative</u>**:
   Exemplu: "Nici un triunghi nu poate avea două unghiuri drepte".

3. **<u>Judecăţi particular afirmative</u>**:
   Exemplu: "Unele numere impare sunt prime".

4. **<u>Judecăţi particular negative</u>**:
   Exemplu: "Unele numere naturale nu sunt pare".

Propoziţiile care sunt folosite în matematică sunt: *definiţiile, axiomele, postulatele* şi *teoremele.*

<u>Axioma</u> - este o propoziţie ce exprimă un adevăr matematic, adevăr ce a devenit evident şi este acceptat ca atare, fără demonstraţie.

Exemple: i) Dacă $a = b$ şi $b = c$, atunci $a = c$.

ii) Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una.

<u>Postulatul</u> - este o propoziţie care stă la baza unei teorii cu ajutorul căreia se pot demonstra alte propoziţii. Ca şi axioma, postulatul se admite ca fiind adevărat, fără demonstraţie.

Exemplu: (Postulatul lui Euclid) - *printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.* Sau se postulează că *există puncte*; *există drepte*; …

<u>Teorema</u> - este o propoziţie care exprimă un adevăr matematic care trebuie demonstrat. Orice teoremă este formată din două părţi:

ipoteza, care este formată din ceea ce se presupune ca fiind adevărat şi

concluzia, care este formată din ceea ce enunţul teoremei afirmă că se poate deduce din ipoteză (şi eventual din axiome).

Demonstraţia este un şir de raţionamente care se fac pornind de la datele din ipoteză (folosind definiţii, axiome sau alte teoreme demonstrate anterior) şi având ca rezultat logic final, concluzia.

Multe teoreme sunt enunţate sub forma unor propoziţii condiţionale. Ipoteza începe cu cuvântul "dacă", iar concluzia începe cu cuvântul "atunci".

Exemple:

1) Dacă un patrulater are două laturi paralele şi congruente, atunci el este paralelogram.
2) Dacă a|b şi a|c, atunci a|(b+c).

Teoremă reciprocă:

Dacă se schimbă între ele ipoteza şi concluzia unei teoreme, atunci se obţine o nouă teoremă, care se numeşte teoremă reciprocă.

Reciproca teoremei (2) de mai sus este: "Dacă a|(b+c), atunci a|b şi a|c". Această teoremă reciprocă nu este adevărată. Pentru a arăta aceasta, este suficient să găsim un exemplu pentru care concluzia este falsă: 2|(5+7), atunci 2|5 şi 2|7.

Un exemplu care arată că există cazuri în care concluzia este falsă, se numeşte *contra exemplu.*

Schematic, o teoremă se prezintă astfel: Dacă "a", atunci "b". Reciproca este: Dacă "b", atunci "a".

	Ipoteză	Concluzie
Teoremă directă	a	b
Teoremă reciprocă	b	a

Acum ipoteză este "b" şi concluzia este "a". Pentru teoreme mai complexe, în care concluzia este formată din mai multe afirmaţii, există mai multe reciproce:

- Teoremă: "Dacă *a*, atunci *b* şi *c*. Această teoremă are trei reciproce:
- Reciproca 1. : Dacă *b* şi c, atunci *a.*
- Reciproca 2. : Dacă *b,* atunci *a* şi *c.*
- Reciproca 3. : Dacă *c,* atunci *a* şi *b*.

Exemplu:

Dacă un număr este divizibil cu 15, atunci el este divizibil cu 3 şi cu 5.

- Reciproca 1. : Dacă un număr este divizibil cu 3 şi cu 5, atunci el este divizibil cu 15. (A)
- Reciproca 2. : Dacă un număr este divizibil cu 3, atunci el este divizibil cu 5 şi cu 15. (F).
- Reciproca 3. : Dacă un număr este divizibil cu 5, atunci el este divizibil cu 3 şi cu 15. (F).

Constatăm că reciproca 1. este adevărată, iar reciprocele 2. şi 3. sunt false.