Rolul contraexemplelor în geometrie

Prof. Humă Irina-Oana,
Colegiul Tehnic „Gheorghe Cartianu”, Piatra Neamţ.

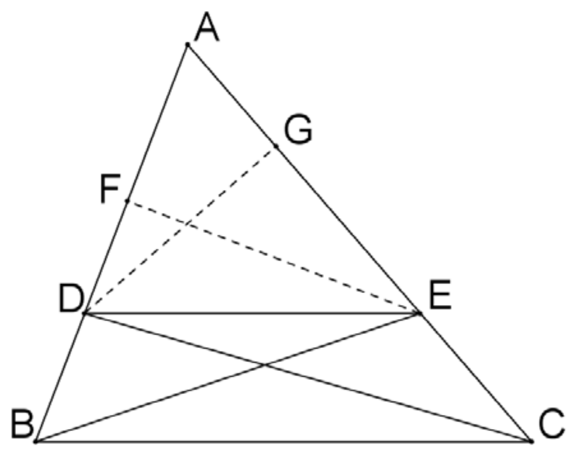
Rolul contraexemplelor este deosebit de important, acestea asigurând o mai bună reținere a noțiunilor cât și de a ilustra posibile greșeli în cursul studierii geometriei. Iată câteva exemple:

- ***Teorema lui Thales.***

Dacă în triunghiul ABC, DE ∥ BC atunci $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AE}}$.

Demonstraţie

În figura de mai jos, ABC este un triunghi oarecare şi DE ∥ BC. Unim punctul B cu E şi D cu C. Atunci triunghiurile DEB şi DEC sunt echivalente, deoarece au aceeaşi bază DE şi înălţimi egale. (distanţa dintre dreptele paralele DE şi BC) Dacă adăugăm la fiecare dintre ele triunghiul ADE, obţinem triunghiurile ABE şi ADC care vor fi de asemenea echivalente. Luăm ca baze laturile AB şi AC; fie EF şi DG înălțimile corespunzătoare.



Scriem că ariile celor două triunghiuri sunt egale :

$$\frac{AB \cdot EF}{2} = \frac{AC \cdot DG}{2};\ AB \cdot EF = AC \cdot DG;\ \frac{AB}{AC} = \frac{DG}{EF}.$$

Acum calculăm în două moduri aria triunghiului ADE şi scriem că rezultatele sunt egale:

$$\frac{AD \cdot EF}{2} = \frac{AE \cdot DG}{2}\ ;\ AD \cdot EF = AE \cdot DG;\ \frac{AD}{AE} = \frac{DG}{EF}.$$

Comparând cele două proporţii obţinute se deduce că: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$

sau $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$. Am obţinut teorema lui Thales.

Dar demonstrația nu este corectă. De ce ?

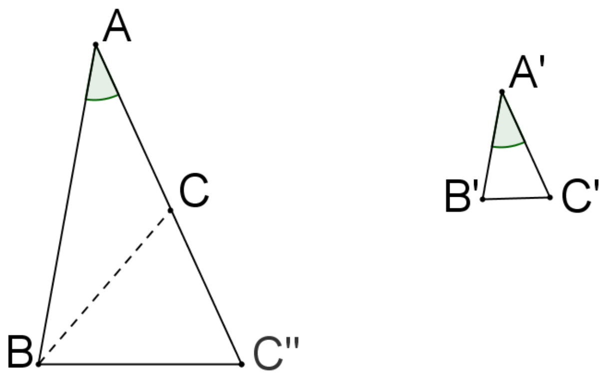
Regula după care se scrie aria unui triunghi în două moduri se demonstrează folosind asemănarea, iar asemănarea se demonstrează cu teorema lui Thales, deci vrem să demonstrăm teorema folosind-o deja.

Primul caz de asemănare

Dacă două triunghiuri au un unghi congruent şi laturile ce-l formează proporţionale atunci ele sunt asemenea.

Demonstrație

Fie două triunghiuri asemenea ABC'' şi $A'B'C'$ astfel ca $BC'' < BA$.



Fie punctul C pe semidreapta AC'' astfel ca $BC = BC''$ (îl putem găsi pentru că $BC'' < BA$).

Triunghiurile ABC, A'B'C' îndeplinesc condițiile din ipoteză dar nu sunt asemenea. Unde este greșeala?

$\sphericalangle C \neq \sphericalangle C'$ ($\sphericalangle C > 90°$ și $\sphericalangle C' > 90°$ deci informațiile din ipoteză nu sunt suficiente nici pentru a afirma că sunt asemenea triunghiurile, nici pentru a afirma că nu sunt asemenea. Pentru a putea face una din aceste afirmații ne mai trebuie o informație în plus, despre cele două triunghiuri și anume faptul că cele două triunghiuri trebuie să fie amândouă de același tip: ascuțite sau obtuze.

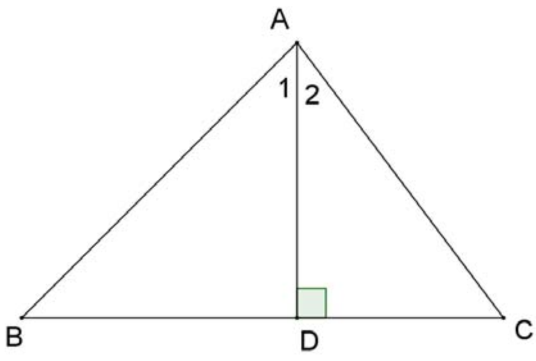
Reciproca teoremei catetei

Fie ABC un triunghi. și AD una din înălțimile sale. Dacă $\mathbf{AB^2 = BC \cdot BD}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

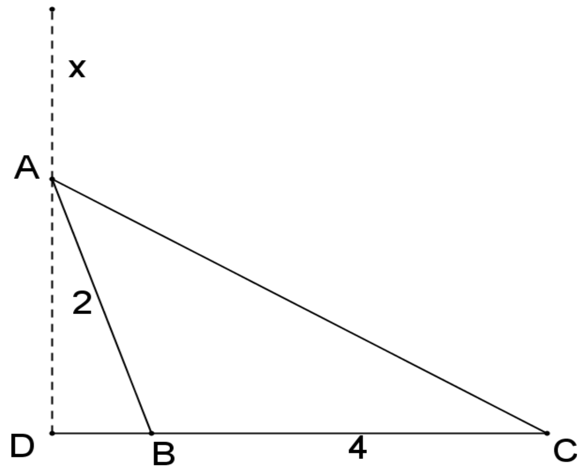
Demonstrație

Pentru a demonstra aceasta, punem relația dată sub forma $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$.

Această proporție arată că triunghiurile ABD și CBA au două laturi proporționale. Ele au unghiul B comun, deci ele sunt asemenea, deci unghiurile lor sunt congruente două câte două. Unghiul D al primului triunghi fiind drept, rezultă că și unghiul A al triunghiului al doilea este drept.



Exemplul următor arată că concluzia este greșită. În triunghiul ABC: AB=2, BC=4, $\sphericalangle B=120°$ și $AD \perp BC$.



În triunghiul ADB avem:
$BD = AB\cos\sphericalangle ABD = 2\cos 60° = 1$. $AB^2 = 2^2 = 4$; $BD \cdot DC = 1 \cdot 4 = 4$ deci $AB^2 = BD \cdot DC$, dar triunghiul ABC nu este dreptunghic.

Astfel de triunghiuri se construiesc foarte ușor.

Pe o dreaptă se iau după voie trei pucte D, B și C, $DC > DB$. În punctul D se ridică perpendiculara Dx pe DB apoi se duce un arc de cerc cu centrul în B și cu raza egală cu media proporțională dintre BC și BD care să taie Dx; fie A punctul de intersecție. Triunghiul ABC îndeplinește condițiile.

De exemplu, se poate lua BD=1, BC=4, BA=2; sau: BD=4, BC=9, BA=6.

De aici rezultă că demonstrația de mai sus este greșită. Unde este greșeala?

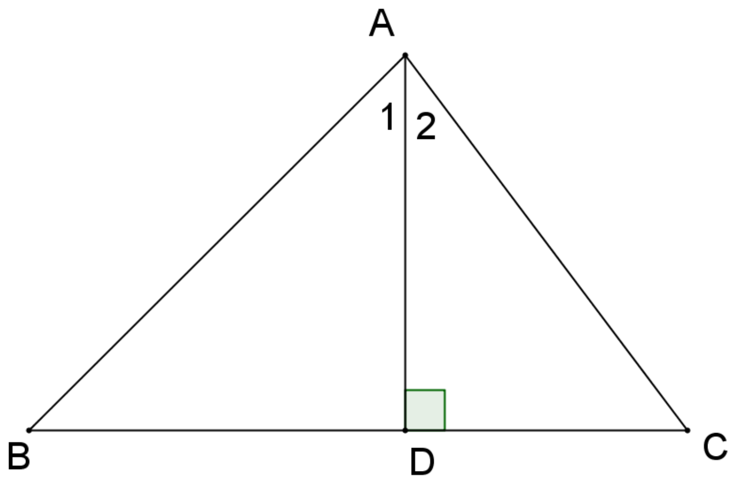
În cazul figurii de mai sus se deduce din relația dată că triunghiurile ABD și CDA au două laturi proporționale, dar unghiurile dintre ele nu sunt congruente, deci afirmația că ele sunt asemenea este nefondată. Din $AB^2 = BC \cdot BD$ se poate deduce că unghiul A este drept numai dacă se știe că înălțimea AD cade în interiorul unghiului A.

Deci trebuie precizat în reciprocă: punctul D este între B și C.

Reciproca teoremei înălţimii

Fie ABC un triunghi şi AD una din înălţimile sale. Dacă $\mathbf{AD^2 = DC \cdot BD}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Demonstraţie



Pentru a demonstra punem relația dată sub forma $\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC}$.

Această proporţie arată că triunghiurile ADB și CDA au două laturi proporţionale. Unghiurile formate de ele fiind congruente (amândouă sunt drepte), rezultă că triunghiurile sunt asemenea. Deci unghiurile lor sunt congruente două câte două, în special $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle C$. Din triunghiul dreptunghic ADC rezultă că $\sphericalangle C + \sphericalangle 2 = 90° \Rightarrow \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90°$.

Dar $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAC = 90°$. Concluzia este greșită. Unde este greşeala?

Totul este corect pînă la afirmația ”$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle BAC$” adică $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC$. Ea este adevărată în cazul figurii noastre dar nu mai este adevărată dacă D cade pe prelungirea bazei. O reciprocă corectă ar fi: Fie ABC un triunghi și AD una din înălțimile sale. Dacă $AD^2 = DC \cdot BD$ și punctul D este între B și C, triunghiul este dreptunghic.

Bibliografie:

1) Mihai Cocuz: *Culegere de probleme de matematică*, Ed. Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1984.
2) Ioan Dăncilă: *Matematica gimnaziului*, Ed. Corint, Bucureşti, 1996.
3) David A.Hollinger: *Probleme de geometrie pentru clasele VI-VIII*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
4) Radu Miron: *Geometrie Elementară*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,1968.