GRUPURI DE MATRICE

Prof. Pop Adrian Ioan,
Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $M_n(\mathbf{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere reale.

Cuplul $(M_n(\mathbf{R}),+)$ este un grup comutativ, iar cuplul $(M_n(\mathbf{R}),\cdot)$ este un monoid necomutativ.

Vom da câteve exemple de submulţimi ale mulţimii $M_n(\mathbf{R})$ care împreună cu înmulţirea matricelor formează grupuri.

~Grupul liniar general de grad n~

Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$. Se ştie că matricea A este inversabilă în monoidul $(M_n(\mathbf{R}),\cdot)$ dacă şi numai dacă det (A) ≠ 0. Mulţimea unităţilor monoidului $(M_n(\mathbf{R}),\cdot)$ se notează $GL_n(\mathbf{R})$ şi avem:
$GL_n(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$

TEOREMĂ

Perechea $(GL_n(\mathbf{R}),\cdot)$ este grup necomutativ , numit **grup liniar general de grad n peste R.**

- **<u>Demonstraţie</u>**

Fie $A, B \in GL_n(\mathbf{R})$. Avem det(A·B)=det(A) · det(B) ∈ **R***, deci $A \cdot B \in GL_n(\mathbf{R})$. Prin urmare mulţimea $GL_n(\mathbf{R})$ este parte stabilă a mulţimii $M_n(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Înmulţirea matricelor este asociativă şi admite elementul neutru $I_n \in M_n(\mathbf{R})$. Deoarece $\det(I_n) = 1 \neq 0 \Rightarrow I_n \in GL_n(\mathbf{R})$.

Prin urmare, înmulţirea matricelor pe mulţimea $GL_n(\mathbf{R})$ admite elementul neutru matricea $I_n \in GL_n(\mathbf{R})$.

Dacă $A \in GL_n(\mathbf{R})$, atunci $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbf{R}^*$ şi se obţine că $A^{-1} \in GL_n(\mathbf{R})$.

În concluzie $(GL_n(\mathbf{R}),\cdot)$ este grup.

Grupul matricelor ortogonale~

Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$.

• Definiţie

Matricea $A \in M_n(\mathbf{R})$ se numeşte **matrice ortogonală** dacă ${}^tA \cdot A = I_n$. Mulţimea matricelor ortogonale de ordinul n se notează $O_n(\mathbf{R})$.

Observaţii

1. Dacă $A \in O_n(\mathbf{R})$, atunci det (A)={-1, 1}.
Într-adevăr, din $A \in O_n(\mathbf{R})$ se obţine că ${}^tA \cdot A = I_n$. (1)
Din relaţia (1) se obţine succesiv
$1 = \det(I_n) = \det({}^tA \cdot A) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$
2. Avem incluziunea $O_n(\mathbf{R}) \subset GL_n(\mathbf{R})$.

TEOREMĂ

Perechea $(O_n(\mathbf{R}), \cdot)$ este un grup necomutativ, numit **grupul matricelor ortogonale de ordinul n.**

- **Demonstraţie**

Fie $A, B \in O_n(\mathbf{R})$ rezultă că ${}^tA \cdot A = I_n$ şi ${}^tB \cdot B = I_n$.
Avem: ${}^t(AB) \cdot$ (AB)= $({}^tB \cdot {}^tA) \cdot$ (AB)= ${}^tB \cdot ({}^tA \cdot A) \cdot$ B=${}^tB \cdot B = I_n$.
Aşadar, $A \cdot B \in O_n(\mathbf{R})$, iar mulţimea $O_n(\mathbf{R})$ este parte stabilă a mulţimii $M_n(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.
Se verifică axiomele grupului.
(**G1**) <u>*Asociativitatea.*</u> Înmulţirea matricelor pe mulţimea $O_n(\mathbf{R})$ este asociativă, fiind operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_n(\mathbf{R})$ (proprietate de ereditate a asociativităţii).
(**G2**) <u>*Elementul neutru.*</u> Din ${}^tI_n = I_n \Rightarrow {}^tI_n \cdot I_n = I_n \cdot {}^tI_n = I_n$ deci $I_n \in O_n(\mathbf{R})$. Rezultă că I_n este elementul neutru al înmulţirii matricelor pe mulţimea $O_n(\mathbf{R})$.
(**G3**) <u>*Elementele simetrizabile.*</u>
Fie $A \in O_n(\mathbf{R})$. Din observaţia 1 rezultă că det(A) = ± 1, deci matricea A este inversabilă în monoidul $M_n(\mathbf{R})$. Din relaţia ${}^tA \cdot A = I_n$ se deduce că $A^{-1} = {}^tA$. Folosind această relaţie se obţine ${}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = {}^t({}^tA) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$, deci $A^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$, iar elementul simetric al matricei A în $O_n(\mathbf{R})$ este matricea A^{-1}.
Înmulţirea matricelor nu este comutativă. În concluzie $(O_n(\mathbf{R}), \cdot)$ este grup necomutativ.

~Exerciţii~

1. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2014^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru x∈**R** şi mulţimea $G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in M$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

c) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Rezolvare:

a)

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \begin{pmatrix} 2014^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ A_0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 \in G$$

b)

$$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2014^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2014^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2014^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$$

$= A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$

c) Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in$ G, $\forall x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu "$\cdot$".

G_1) Asociativitatea . Înmulţirea matricelor pe mulţimea G este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$.

G_2) Comutativitatea: $\forall A_x, A_y \in G, A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$

$$\left.\begin{array}{l} A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{“}\cdot\text{“ comutativă.}$$

G_3) Elementul neutru:

$\exists A_0 = I_3 \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_0 = A_0 \cdot A_x = A_x, \forall A_x \in G \Rightarrow A_0$ element neutru.

G_4) Elementele simetrizabile:

$\forall A_x \in G, \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$

$$A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2014^{x+x'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+x' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2014^{x+x'} = 0 \\ x + x' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x' = -x \Rightarrow$$

$A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x .

2. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \middle| n \in N^* \right\} \subset M_3(\mathbf{R})$. Să se arate că $(M, \cdot)$ este grup comutativ.

Rezolvare:

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculăm puterile matricei A, pentru a determina mulţimea M.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow$$

$$A^{3p} = \left(A^3\right)^p = I_3, \ \forall p \in N^* .$$

$$A^n = \begin{cases} I_3, \text{daca} \quad n = 3p \\ A, \text{daca} \quad n = 3p+1 \\ A^2, \text{daca} \quad n = 3p+2, \ p \in \mathbf{N} \end{cases} \Rightarrow M = \left\{I_3, A, A^2\right\}$$

Înmulţirea matricelor pe mulţimea M este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$.

Alcătuim tabla operaţiei de înmulţire pe M:

.	I_3	A	A^2
I_3	I_3	A	A^2
A	A	A^2	I_3
A^2	A^2	I_3	A

Din care deducem că "·" pe M este comutativă, admite elementul neuru I_3, şi orice element din M este simetrizabil.

În concluzie $(M, \cdot)$ este grup comutativ.

3. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Q}, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$. Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

Rezolvare:

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Q}, \det \mathrm{A} = 1 \right\} \subset M_2(\mathbf{R}).$$

G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor $\Leftrightarrow$

$\forall A, B \in G \Rightarrow A \cdot B \in G$.

Fie $A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{Q}, \det \mathrm{A} = 1$ şi $B = \begin{pmatrix} 2z & 3t \\ t & 2z \end{pmatrix}, z, t \in \mathbf{Q}, \det \mathrm{B} = 1$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2z & 3t \\ t & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xz + 3yt & 6xt + 6yz \\ 2yz + 2xt & 4xz + 3yt \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\left(xz + \frac{3}{2}yt\right) & 3(2xt + 2yz) \\ 2xt + 2yz & 2\left(xz + \frac{3}{2}yt\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 3\beta \\ \beta & 2\alpha \end{pmatrix},$$

unde $\alpha = xz + \frac{3}{2}yt \in \mathbf{Q}, \beta = xt + yz \in \mathbf{Q}$

$\det(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 3\beta \\ \beta & 2\alpha \end{pmatrix} \in G$$

G_1) Asociativitatea .

$$\left. \begin{array}{l} G \subset M_2(R) \text{ parte stabilă} \\ \text{"·" pe } \mathrm{M}_2(\mathrm{R}) \text{ este asociativă} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Înmulţirea matricelor pe G este asociativă .

G_2) Comutativitatea: “·” comutativă $\Leftrightarrow [\forall A, B \in G \Rightarrow A \cdot B \in G]$

Fie $A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \in G$ şi $B = \begin{pmatrix} 2z & 3t \\ t & 2z \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2z & 3t \\ t & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xz + 3yt & 6xt + 6yz \\ 2xt + 2yz & 4xz + 3yt \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 2z & 3t \\ t & 2z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xz + 3yt & 6xt + 6yz \\ 2xt + 2yz & 4xz + 3yt \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

G_3). Elementul neutru

Verificăm dacă $I_2 \in G \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbf{Q}$ $a.i. \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $4x^2 - 3y^2 = 1 \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{2},\ y = 0, 4x^2 - 3y^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 0^2 = 1 \Rightarrow$$

$\exists I_2 \in G$ astfel încât $\forall A \in G,\ A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A.$

G_4). Elementele simetrizabile:

$\forall A \in G, \exists A^{-1} \in G$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$

Fie $A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \in G,\ x, y \in \mathbf{Q}$, $\det A = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,\ A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2x & y \\ 3y & 2x \end{pmatrix},\ A_{11} = 2x,\ A_{12} = -3y,\ A_{21} = -y,\ A_{22} = 2x \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2x & -3y \\ -y & 2x \end{pmatrix},\ \det(A^{-1}) = 4x^2 - 3y^2 = 1 \Rightarrow A^{-1} \in G$$

4. Fie G=$\left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in R \right\} \in M_2(\mathbf{R})$.

Să se arate că (G,·) este grup abelian

Rezolvare:

G parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu „·” $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$[$\forall$ A(a),A(b)$\in$ G $\Rightarrow$A(a)·A(b)$\in$ G]

A(a) ·A(b) = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde α = a+b $\in \mathbf{R} \Rightarrow$ G parte stabilă.

„·” pe G este asociativă fiind operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_2(\mathbf{R})$.

„·” comutativă $\Leftrightarrow$ $\forall$ A(a), A(b) $\in$ G, A(a) · A(b) = A(b) · A(a)

$$\left.\begin{array}{r} A(a)\cdot A(b)=A(a+b) \\ \\ A(b)\cdot A(a)=A(b+a)=A(a+b) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ „·” comutativă

``Elementul neutru ``: A(0) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

$\exists$ A(0) $\in$ G astfel incât A(a) · A(0) = A(0) · A(a) = A(a) ; $\forall$ A(a) $\in$ G

``Elementele simetrizabile``:

$\forall$ A(0) $\in$ G; $\exists$ $A(a^{'})$ Є G astfel incât A(a) · $A(a^{'})$ = $A(a^{'})$ · A(a) = I_2 $\Rightarrow$ A(a+a’) = A(a’+a) = A(0) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ a’ = -a $\in$ **R** .

$\Rightarrow$ $[A(a)]^{-1} = A(-a) \in G$.

Bibliografie:

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, Manual de matematică pentru clasa a XII-a, Editura Carminis, 2009.
2. Mircea Ganga, Manual de matematică pentru clasa a XII-a, Editura Mathpress, 2008.
3. Ghid metodic pentru Bacalaureat 2009, Editura Gill, 2009.