

# STRATEGII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICA

PROFESOR: PANDELE VICTORIA  
SCOALA GIMNAZIALA NR. 1 FLORESTI,  
GIURGIU

## 1. Rolul problemelor in invatarea matematicii

Privitor la importanta rezolvarii de probleme in studiul matematicii, Polya arata intr-un articol [1]: “Rezolvarea problemelor a fost baza invatamantului inca de pe timpul papirusului Rhind. Opera lui Euclid poate fi considerata ca o contributie pedagogica ce consta in disecarea geometriei in diferite probleme usor de dominat. Dupa parerea mea problemele sunt si astazi baza invatamantului matematic.”

Putem afirma ca rezolvarea de exercitii si probleme reprezinta factorul decisiv in invatarea matematicii in invatamantul preuniversitar.

Problemele constituie **motivul**, **mijlocul** si **scopul** invatarii matematicii [2]. **Motivul** deoarece acestea suscita curiozitatea elevilor si impun acomodarea cu teoria care ajuta la rezolvare.

**Mijlocul** deoarece studiul exclusiv al teoriei nu poate certifica in ce masura a fost insusita creativ teoria. **Scopul** deoarece majoritatea elevilor invata matematica pentru a face fata examenelor / T.U. / evaluarilor nationale etc., in aceste cazuri baza fiind rezolvarea de probleme. Iata cateva aspect care definesc rolul problemelor in invatarea matematicii [1]:

### - Problemele intervin direct in formarea notiunilor.

Prin varietatea lor problemele contribuie la delimitarea sferei notiunilor si chiar la intelegerea lor. Piaget nu este singurul care a enuntat parerea ca intelegerea completa presupune “reinventarea” teoriei de catre elevi. Este adevarat ca anumite segmente ale teoriei, unele definitii, procedee, metode, pot fi refacute prin exemplificari date de elev sau prin rezolvarea de probleme. Astfel spus, problemele trebuie sa aiba si caracter de exemple, prin care se umple sfera notiunii si de contraexemple prin care se delimiteaza sfera.

### **- Prin situatii problema se anticipeaza si se provoaca introducerea teoriei.**

Pentru a capta interesul elevilor si a-i antrena in activitatea de instruire atunci cand se predă o tema noua, este indicat ca profesorul sa prezinte mai intai problema practica, situatia care a provocat studierea ei prin mijloace matematice. In felul acesta se poate atinge un obiectiv esential: sporirea motivatiei invatarii. Profesorul poate sa regizeze un dialog punand intrebari de incurajare de genul: “cum credeti ca s-ar putea...”, “cautati cateva variante posibile ale...” etc. Pedagogii sustin ca astfel de incitari si raspunsurile respective au o valoare formativa mai mare decat receptionarea cuminte de catre elevi a explicatiilor de tip monolog venite din partea profesorului. Aparent necesitatea acestor demersuri motivationale scade cu varsta, in realitate insa, la clasele mici, notiunile teoretice fiind putine si simple, aplicatiile teoriei sunt prezentate practice concomitant cu insasi teoria; motivatia este mai utila la elevii mari, care in lipsa unor explicatii privind importanta capitolului/lectiei in alte capitole ale matematicii sau in alte domenii, ar putea sa intrebe: “...la ce ne foloseste?”.

### **- Prin rezolvarea problemelor se face controlul insusirii teoriei**

Simpla reproducere a unor definitii, reguli, formule, tehnici de calcul etc. de catre elevi nu asigura verificarea completa a receptionarii de catre acestia a mesajului transmis prin predare. Paradoxal, desi uneori elementele formale ale unei definitii nu pot fi reproduse de catre elevi, totusi acestia pot aplica notiunile respective in rezolvarea problemelor.

Reproducerea teoriei reprezinta doar primul nivel pe care urmeaza sa se cladeasca deplina intelegere care se verifica de obicei prin posibilitatea de a aplica teoria, adica prin rezolvarea de probleme. Este clar ca nu toate tipurile de probleme au aceleasi valente de verificatori ai teoriei, o posibila ierarhizare a acestora fiind urmatoarea:

- exercitii de aplicare numerica si/sau literala a unor algoritmi, relatii, formule, teoreme;
- recunoasterea unor exemple si contraexemple, exercitii de clasificare;
- construirea unor exemple si contraexemple;
- probleme cu grade tot mai sporite de dificultate din capitolul respectiv;
- probleme de sinteza.

### **Rezolvarea problemelor are ca efect formarea de priceperi si deprinderi, dezvoltarea capacitatilor de investigare si a creativitatii.**

Matematica scolara este privita de multi ca o excelenta gimnastica a mintii care ordoneaza si disciplineaza gandirea, chiar daca de cele mai multe ori in orele de matematica nu se rezolva

probleme cu aplicabilitate directă în practică, ci problemele rupte de realitate, care servesc parca doar pentru a înainta în tainele matematicii.

“A ști să rezolvi o problemă este o îndemănare practică – o deprindere – cum este inotul, schiul, cântatul la pian care se poate învăța prin imitare și exercițiu.” [5]

Această activitate își are propriile legi de dezvoltare. În esență putem remarca două niveluri în învățarea rezolvării problemelor:

- formarea priceperilor;
- formarea deprinderilor.

Tot Polya afirmă că nu există “o cheie magică” prin care s-ar deschide toate ușile și ar rezolva toate problemele, ci se pot da doar unele sfaturi de abordare a rezolvării. “Dacă vreți să învățați să rezolvați probleme trebuie... să rezolvați probleme.” [5] O posibilă etapizare a procesului de rezolvare este următoarea [6]: enunț; cum gândim; ideea; soluția. Practica a demonstrat faptul că de multe ori se învață mai cu folos prin rezolvarea de probleme... rezolvate. Acest lucru nu se referă la memorarea rezolvării, ci la reluarea rezolvării pe altă cale sau rezolvarea cu ajutorul unor variante îmbunătățite ale rezolvării inițiale. Satisfacția găsirii importantei unei ipoteze sau a unui amanunț, bucuria “iluminării” rezolvitorului, este foarte mult ajutată de recepționarea rezolvării inițiale. Nerezolvarea unei probleme sau rezolvarea ei după mai multe încercări eșuate se poate dovedi mai utilă pentru formarea priceperilor decât rezolvarile directe, care în afara de satisfacția succesului imediat s-ar putea să nu lase alte urme care să poată fi folosite și alte probleme. Așa cum constată H. Banea în “Metodica predării matematicii” totuși la clasă profesorul dorește și apreciază rezultatul corect obținut direct și repede, încercările greșite, ezitățile fiind în general sancționate.

Formarea deprinderilor ține de însușirea unor automatisme. Din punct de vedere metodic apare contradicția între trebuința de a face multe exerciții pentru formarea acestor deprinderi și grija de a nu cădea în rutină, în formalism. Aceleași manevre ale gândirii (descompunerea problemei, verificări pe parcurs etc.) se fac în viteză și în mod “inconstient”. Exerciții și probleme analoage pentru repetarea metodei sau procedurii (pentru imprimarea în memorie), gradarea dificultăților în mod excepțional (variații aproape insensibile ale exercițiilor și problemelor în primele etape, diferențieri mari în ultimele), probleme “contrare” (care să vehiculeze contraexemplu), probleme combinate care fac legătura între capitolele care se exersează și alte capitole în care rezolvarile sunt deja deprinse, toate acestea converg spre un program de formare a deprinderilor.

### **- Problemele contribuie la asigurarea caracterului interdisciplinar al matematicii.**

Insasi denumirea ariei curriculare “matematica si stiinte” sugereaza importanta matematicii ca disciplina de baza pentru alte discipline: fizica, chimia, biologia, ca sa nu mai vorbim de disciplinele tehnice – toate se bazeaza mai mult sau mai putin pe calculi matematice, pe metode si algoritmi de rezolvare a problemelor. Cu siguranta, niciun profesor de matematica nu a fost ocolit de reprosurile colegilor care predau aceste discipline, reprosuri ce vizeaza incapacitatea unor elevi de a efectua diverse operatii, calcule, sau de a transpune in relatie matematica un fenomen. Dar aceste priceperi, deprinderi pe care colegii respectivi le considera ca fiind inexistente, de cele mai multe ori se dovedesc a fi din categoria acelor deprinderi/priceperi pe care elevii ar fi trebuit sa le dobandeasca cu ceva ani in urma. De aceea putem sesiza doua aspecte:

1. probabil ca la momentul respectiv nu s-a pus accent pe rezolvarea de exercitii/probleme suficient de multe astfel incat sa se asigure formarea la elevi a priceperilor si deprinderilor corespunzatoare;
2. uneori se regasesc in programele scolare neconcordante intre unele materii, in sensul ca, de exemplu, profesorul de fizica trebuie sa predea o lectie care se bazeaza pe elemente matematice pe care insa elevii nu le-au invatat inca.

In raport cu alte materii, matematica prezinta un handicap in ceea ce priveste puterea de atractie. Arta profesorului de matematica trebuie sa se evidentieze si din aceasta perspectiva, in sensul ca gasirea unor aplicatii din domeniile atractive pentru elevi ar avea ca rezultat transferarea si asupra matematicii a atractivitatii acestor materii.

### **2. Strategii de rezolvare a problemelor**

O definitie simplista a notiunii de strategie de rezolvare de probleme este cea data de Gagne [4]: “un ansamblu de reguli de selectare si combinare a regulilor extrase din volumul de cunostinte.” Strategia stabileste in acelasi timp si ordinea de prioritate a folosirii acestora, precum si modificarea sau operarea in alt mod a lor.

Daca ne referim la paradigma lui D. P. Ausubel si F. B. Robinson, mai putem spune ca strategia indica pasii necesari reducerii golului. Procedeele euristice determina linia directoare a rezolvarii problemei, adica strategia, iar detaliile, verigile prin care se realizeaza rezolvarea, definesc

tactica. Strategia și tactica sunt cele două elemente esențiale ale unui plan de rezolvare a unei probleme. [4]

În rezolvarea problemelor distingem planuri sistematice (complete) și planuri euristice (probabiliste). Planul complet presupune o explorare sistematică a tuturor posibilităților, astfel că după un număr finit de pași să se ajungă la rezultat. Acestui plan îi corespunde o strategie completă sau algoritmică. În principiu, un plan algoritmic, exhaustiv, conduce sigur la soluție, dar de obicei numărul pașilor este atât de mare încât este greu de realizat, uneori chiar imposibil. În cazul unui plan euristic, recurgem la procedee prin care scurtăm activitatea de căutare și reducem numărul de încercări, verificând doar ipotezele cu probabilitatea de aplicabilitate cea mai mare.

În general, o strategie algoritmică reprezintă o înlanțuire secvențială de etape desfășurate sistematic într-o ordine prestabilită, standard, și care conduce în mod cert la rezolvarea unei probleme. Strategiile de tip algoritmic își au rostul lor în rezolvare: cunoscând anumite relații între necunoscute și datele problemei, acest fapt ne scuteste de descoperiri repetate. Există însă numeroase situații, mai ales în problemele de demonstrat, în care regulile concrete de rezolvare nu sunt cunoscute de elev, nefiind încă descoperite. “Un bun rezolvitor de probleme se apropie de soluția unei probleme pe cale euristică și abia apoi o prezintă algoritmic.” [2] O bună strategie este în același timp economică:

- reduce la minimum numărul de încercări necesare;
- coordonează încercările după plauzibilitate, după timpul solicitat (în rezolvarea unei probleme se caută metoda mai simplă, mai directă, și apoi se trece la sortarea altor procedee).

De altfel, acestea sunt funcțiile euristicii – disciplina care reunește procedeele menite să conducă la descoperire și invenție. În acest sens, Kuliutkin constată că de fiecare dată când se analizează strategiile de rezolvare a problemelor ele nu sunt nici pur standardizate, nici pur euristice, dar uneori pot fi, cu precădere, euristice sau algoritmice, în funcție de natura situației problematice, iar I. Manzat este de părere că între limitele extreme ale algoritmului și euristicii se interpun o gamă întinsă de forme intermediare, mixte. [4]

Deoarece cunoașterea este un proces și nu un produs, elevul nu trebuie confundat cu o “mică bibliotecă vie”, ci trebuie învățat să participe la procesul care face posibilă crearea de cunoștințe, să gândească el însuși matematic, să privească fenomenele într-o ierarhie a învățării. Dacă sunt

asigurate conditiile interne necesare rezolvării problemei, elevul este capabil să rezolve în funcție de indicațiile furnizate și de capacitatea sa intelectuală. Aceste condiții sunt următoarele: [4]

1. alăturarea regulilor care urmează să fie îmbinate pentru a ajunge la soluție;
2. actualizarea regulilor aferente, prin îndrumări verbale sub forma unor întrebări cu rol de a stimula această actualizare;
3. dirijarea gândirii pe anumite direcții, atât prin îndrumări verbale furnizate din exterior, cât și prin autoîndrumări.

Îndrumările verbale cu rol de corectare a rezultatelor trebuie să fie exprimate (traduse) în același mod utilizat de elevi în încercările lor de rezolvare a problemelor (activ, iconic, simbolic).

Asadar, este foarte important pentru desfășurarea procesului rezolutiv ca elevul să-și adreseze lui însuși îndrumări, adică “autoîndrumări” cum le numește Gagne. Astfel de reguli de autoîndrumare sunt numite strategii (sau reguli) supraordonate, care ne indică modalități de combinare a regulilor extrase din volumul de cunoștințe. Strategiile care ghidează rezolvarea problemelor sunt “independente” de conținut, se referă la modul general de comportare a elevului indiferent de ceea ce studiază el.

Pe lângă aceste strategii mai există o varietate de strategii folosite în învățare pe care Gagne le clasifică în: [4]

- strategii pentru starea de pregătire: atenție, motivație, statut cognitiv
- strategii de stocare și reconstituire
- strategii de elaborare a ipotezelor etc.

Exemple de astfel de strategii sunt furnizate de metodele și procedeele euristice aplicate direct sau apelate prin întrebări care au și rol mobilizator și de menținere a unei tensiuni benefice rezolvării problemelor. Aceste îndrumări verbale se transmit de obicei prin conversație euristică, metoda care determină elevii “la investigație prin efort personal de căutare în sfera informațiilor existente deja în mintea lor” [3]. Insa, așa cum afirmă Polya, “profesorul trebuie să ajute, dar nici mult și nici prea puțin, astfel ca elevului să-i revină o parte rațională din muncă.”

Conversația euristică poate pune în acțiune procese psihice afectiv-motivational-volitiv ale rezolvitorului prin formulări ca:

- “Să ne imaginăm o problemă înrudită!”
- “Să modificăm problema dată pentru a obține una mai simplă pe care să o putem rezolva!”
- “Se poate obține rezultatul și pe altă cale?”

- “Putem utiliza acest rezultat la rezolvarea altei probleme?”

In privinta tipurilor de intrebari pe care profesorul le pune in sprijinul elevului, acestea se clasifica in mai multe moduri. Astfel, Cerghit sustine ideea ca in cadrul conversatiei euristice trebuie sa existe un echilibru intre cele doua tipuri de intrebari: [3]

- de verificare a memoriei:

a) de tip reproductiv: “ce este?”, “ce ati avut?”

b) de tip reproductiv-cognitiv: “care este?”, “ce?”, “cand?”

- de stimulare a gandirii: “ce ne spune...?”, “cum aplicam?”, “la ce ne este util/a?”.

Din pacate predomina inca in practica unor cadre didactice intrebarile de tip reproductiv-cognitiv in detrimentul celor productiv-cognitive de tipul “de ce?”. Asa cum mentioneaza Cerghit, pentru solicitarea operatiilor superioare ale gandirii sunt folosite formulari de tipul: “de ce?”, “cum?”. Trecerea de la descriptivul “cum?” la cauzalul “de ce?” o realizeaza intrebarile de descoperire de tip euristic.

O alta clasificare a tipurilor de intrebari, realizata tot de Cerghit, este urmatoarea: [3]

- intrebari **convergente**: indeamna la analize, comparatii, sinteze corespunzatoare unei gandiri de acelasi tip;

- intrebari **divergente**: exerseaza gandirea pe traiectorii originale;

- intrebari **de evaluare**: necesita emiterea de judecati de valoare, de anticipare.

Concluzia importanta este ca strategiile care ghideaza rezolvatorul sunt esentiale in rezolvarea problemelor, indiferent de continutul problemei: “Pentru a fi un adevarat rezolvator de probleme, individul trebuie sa-si fi insusit o multime de deprinderi intelectuale organizate.” este ceea ce afirma Gagne. [4] “... dupa ce ne-am convins ca elevul intelege teoremele fundamentale, cel mai eficient mod de abordare de catre profesor a rezolvarii problemelor este sa predea strategii care sa se aplice la clase importante de probleme (...), iar de la un punct incolo, nemandispanand de strategii de-a gata, vor fi nevoiti sa si le elaboreze ei insisi” este ideea lui Ausubel. [4]

In categoria **strategiilor care ghideaza rezolvarea problemelor** cuprindem indrumarile de orientare a gandirii, care tind sa imbogateasca cu timpul repertoriul de strategii cognitive ale rezolvatorului. Acestea insa se realizeaza prin exersarea rezolvarii atat de probleme creative, cat si de rutina. Imbunatatirea capacitatii rezolutive a problemelor creative se reflecta in cateva abilitati:

- a cauta reprezentarea corecta a problemei;

- a fi constient de varietatea tehnicilor de atac ale problemei (care include in primul rand cunoasterea unor procedee euristice);
- a fi constient atat de spatiul problemei, cat si de blocul de operatori pentru a te deplasa cu usurinta in spatiul starilor;
- a te feri de pericolul fixitatii functionale.

Strategiile care ghideaza rezolvarea problemelor nu trebuiesc confundate cu strategiile rezolutive. Acestea din urma sunt cele pe care elevul si le formeaza in procesul instruirii sau si le elaboreaza, cu sau fara sprijinul celor de ghidare a cautarii euristice si a altor elemente de organizare cognitive date, si cuprind:

- procedeele euristice;
- procedee de rezolvare a problemelor tipice domeniului de cunoastere;
- scheme complexe de interferenta.

Bineinteles ca strategia rezolutiva reflecta intr-o oarecare masura si efectele strategiei de ghidare, dar in niciun caz nu se poate pune semnul egal intre cele doua categorii deoarece o strategie rezolutiva ia nastere pe baza actiunii mentale din partea rezolvitorului asupra unor continuturi stiintifice.

## **BIBLIOGRAFIE**

1. BANEA, H. – Metodica predarii matematicii, Ed. Paralela 45, Pitesti, 1997
2. BRANZEI, D., BRANZEI, R. – Metodica predarii matematicii, Ed. Paralela 45, Pitesti, 2000
3. CERGHIT, I. – Metode de invatamant, E. D. P., Bucuresti, 1997
4. CIRJAN, F. – Didactica Matematicii, Ed. Corint, Bucuresti, 2007
5. POLYA, G. – Cum rezolvam o problema, Ed. Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti, 1965
6. RUSU, E. – Problematizare si probleme in matematica scolara, E. D . P., Bucuresti, 1978