DESPRE PĂTRATUL UNUI NUMĂR NATURAL

Profesor Florea Adrian
Școala Gimnazială „Avram Iancu"
București

a	$n=a^2$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

a	$n=a^2$
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

Un număr natural n este pătrat perfect, dacă este pătratul unui număr natural. Aşadar, n este pătrat perfect, dacă există un număr natural a astfel încât $n = a^2$.

Se observă că pătratul unui număr natural poate avea ca ultimă cifră pe 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Astfel, dacă un număr natural are ca ultimă cifră pe 2, 3, 7, sau 8, atunci acesta nu poate fi pătratul unui număr natural.

Se pune problema acum invers: cunoscând un pătrat perfect, adică pătratul unui număr natural, se cere să aflăm numărul natural al cărui pătrat este acesta. Adică, cunoscând $n = a^2$, se cere să-l aflăm pe a. Acest număr natural a se numeşte *rădăcina pătrată* a numărului n. Se notează $\sqrt{n}$ şi se mai citeşte *radical din n*. Exemple:

$$\sqrt{4}=2;\ \sqrt{16}=4;\ \sqrt{25}=5;\ \sqrt{64}=8;\ \sqrt{100}=10$$

Prin definiţie, rădăcina pătrată, sau radical dintr-un număr pozitiv, este un număr pozitiv al cărui pătrat este numărul de sub radical. $\sqrt{n}=a$, dacă $a^2=n$ $(n\geq 0,\ a\geq 0)$. Definiţia este valabilă şi pentru numere raţionale pozitive. Exemple: $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{5}{7}$ pentru că $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, respectiv $\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}$

Dacă a este număr pozitiv atunci $\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{a^4}=a^2$; $\sqrt{a^6}=a^3$; $\sqrt{a^{2k}}=a^k$.

$$\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b;\ \sqrt{a^3}=a\sqrt{a};\ \sqrt{a^5}=a^2\sqrt{a};\ \sqrt{a^{2k+1}}=a^k\sqrt{a}$$

Putem să aflăm uşor rădăcina pătrată a unui număr pătrat perfect astfel: descompunem numărul în produse de factori primi şi formăm grupe de câte doi factori identici. Din fiecare pereche spunem că „iese” câte un factor. Produsul lor este rădăcina pătrată.

$$\begin{array}{r|l l}
144 & 2 & \\
72 & 2 &)2 \\
36 & 2 & \\
18 & 2 &)2 \\
9 & 3 & \\
3 & 3 &)3 \\
1 & &
\end{array}
\qquad \sqrt{144}=\sqrt{2^4\cdot 3^2}=2^2\cdot 3=4\cdot 3=12$$

Este evident că nu toate numerele naturale sunt pătrate perfecte. Astfel că rădăcina pătrată dintr-un număr natural care nu este pătrat perfect, nu mai este număr natural.

Cum calculăm rădăcina pătrată dintr-un astfel de număr învăţăm cu altă ocazie. Acum putem doar să aproximăm:

$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$

……………………………

$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4$

Două pătrate perfecte se numesc *consecutive*, dacă sunt pătratele a două numere naturale consecutive. Ex.: 16 şi 25 sunt pătrate perfecte consecutive pentru că sunt pătratele numerelor naturale consecutive 4 şi 5. La fel 36 şi 49; 49 şi 64; 100 şi 121, etc.

Orice număr natural cuprins între două pătrate consecutive nu este pătrat perfect.

- Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, numărul $n(n + 2)$ nu este pătrat perfect.
  Făcând înmulţirea obţinem: $n(n + 2) = n^2 + 2n$.
  Dar $n^2<n^2 + 2n<n^2 + 2n +1$, adică $n^2<n^2+2n<(n + 1)^2$ pentru orie $n\in\mathbf{N}^*$ şi cum n şi n + 1 sunt consecutive, rezultă că n^2 şi $(n + 1)^2$ sunt pătrate consecutive, deci $n^2 + 2n$ nu poate fi pătrat perfect.
- Arătaţi că numărul $4n(n + 1)$ nu este pătrat prfect pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

► Foarte interesantă este observaţia următoare:

$1^2 = 1$;	un număr impar
$2^2 = 1 + 3$;	două numere impare consecutive
$3^2 = 1 + 3 +5$;	trei numere impareconsecutive
$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$;	patru numere impare consecutive
$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 +9$;	cinci numere impareconsecutive

…………………………..

$10^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 +13 + 15 + 17 + 19$; 10 numere impare consecutive

$11^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$; 11 numere impare

…………………………………….

şi aşa mai departe, **adică pătratul unui număr natural este egal cu suma atâtor numere impare consecutive, începând cu 1, câte unităţi are acel număr**!

► Alte egalităţi interesante:

Dacă adunăm pătratele primelor 10 numere naturale avem suma $S_{10} = 55\cdot7$; suma pătratelor primelor 100 de numere naturale este $S_{100} = 5050\cdot67$; suma pătratelor primelor 1000 de numere naturale este $S_{1000} = 500500\cdot667$

$S_{10} = 55 \cdot 7$
$S_{100} = 5050 \cdot 67$
$S_{1000} = 500500 \cdot 667$

Observaţi regula de obţinere a sumelor şi scrieţi S_{10000}.

►O simetrie interesantă se observă la pătratele numerelor formate numai din cifre 1:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
11^2 &= 1\,2\,1\\
111^2 &= 1\,2\,3\,2\,1\\
1\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,3\,2\,1\\
11\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,5\,4\,3\,2\,1\\
111\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,5\,6\,5\,4\,3\,2\,1\\
1\,111\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\\
11\,111\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\\
111\,111\,111^2 &= 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1
\end{aligned}
$$

Să considerăm acum numărul 121 şi să intercalăm între cifrele sale câte un 0, apoi câte doi de 0, etc. Obţinem numerele 10201, 1002001, 100020001, 10000200001 etc. Scriind pătratele lor obţinem:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
11^2 &= 1\,2\,1\\
101^2 &= 1\,0\,2\,0\,1\\
1001^2 &= 1\,0\,0\,2\,0\,0\,1\\
10001^2 &= 1\,0\,0\,0\,2\,0\,0\,0\,1\\
100001^2 &= 1\,0\,0\,0\,0\,2\,0\,0\,0\,0\,1
\end{aligned}
$$

adică şi la pătratul numărului respectiv apar intercalate între 1 şi 2 şi între 2 şi 1 tot atâtea zerouri câte sunt între cifrele 1 la numărul care se ridică la pătrat!

Bibliografie

GURAN E. *Matematică recreativă,* Editura Junimea, 1985

BOBANCU V., *Caleidoscop matematic,* Editura Albatros, București 1979

GARDNER, M., *Amuzamente matematice*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

LITTLEWOOD, J.E., *Varietăţi matematice,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1969.

MIHAILEANU, N., *Istoria matematicii*. *Antichitatea, Evul mediu, Renaşterea,* Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

VODA, V, Gh., *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, Bucureşti, 1981.

IOSUB B. *Aritmetica distractivă,* Editura Tineretului, București, 1957