PUNCTE JACOBI ÎN TRIUNGHI

Prof. Ștefan Mariana ,
Școala Gimnazială ” Liviu Rebreanu ” ,
Mioveni , Județul Argeș

1) *Dacă A' , B', C' sunt puncte în planul Δ ABC astfel încât m(∢ A'BC) = m(∢ C'BA) , m(∢A'CB) =m(∢ B'CA) , m(∢ B' AC) = m(∢ C' AB) , atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente într-un punct.*

Rezolvare :

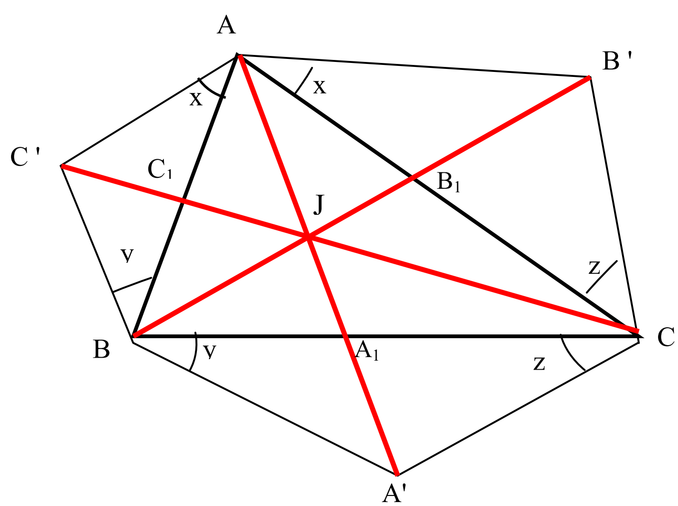
Analizăm cazul BC∩ AA'≠Ø , BC∩ AA' ={A_1}, celelalte cazuri presupunând raționamente similare.

Notăm m∢(B' AC) = x , m∢(A'BC) = y și m∢(B'CA) = z .

$$A_{ABA'} = A_{ABA_1} + A_{BA_1A'} = \frac{A_1B \cdot h_1}{2} + \frac{A_1B \cdot h_2}{2} = \frac{A_1B(h_1 + h_2)}{2}$$

$$A_{ACA'} = A_{ACA_1} + A_{CA_1A'} = \frac{A_1C \cdot h_1}{2} + \frac{A_1C \cdot h_2}{2} = \frac{A_1C(h_1 + h_2)}{2}$$

$$\frac{A_{ABA'}}{A_{ACA'}} = \frac{\frac{A_1B(h_1+h_2)}{2}}{\frac{A_1C(h_1+h_2)}{2}} = \frac{A_1B}{A_1C}$$



Obținem

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_{ABA'}}{A_{ACA'}} = \frac{AB \cdot A'B \cdot \sin(B+y)}{AC \cdot A'C \cdot \sin(C+z)}$$

și analog avem :

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{A_{BCB'}}{A_{BAB'}} = \frac{BC \cdot B'C \cdot \sin(C+z)}{BA \cdot B'A \cdot \sin(A+x)},$$

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_{CAC'}}{A_{CBC'}} = \frac{CA \cdot C'A \cdot \sin(A+x)}{CB \cdot C'B \cdot \sin(B+y)}.$$

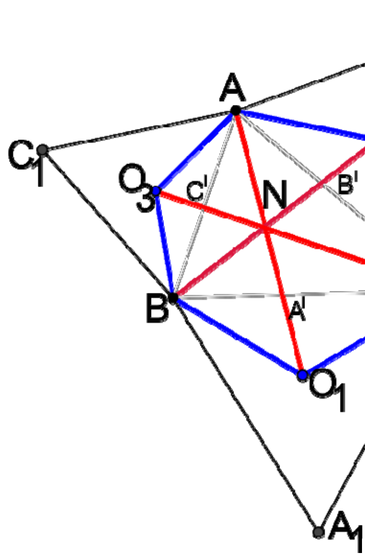
Se verifică $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva , dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente într-un punct. **Acest punct este numit Punctul lui Jacobi.**

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) a fost un matematician german care a avut contribuții importante în teoria funcțiilor eliptice , ecuațiile diferențiale și mecanica rațională.

Particularizând măsurile unghiurilor x , y , z , se obțin mai multe puncte ramarcabile ale triunghiului. De observat că punctul lui Jacobi poate fi și în exteriorul triunghiului ABC.

2) *Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BCA_1 , ACB_1 și ABC_1 . Dacă O_1 ,O_2 ,O_3 sunt centrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri echilaterale atunci dreptele AO_1 , BO_2 și CO_3 sunt concurente într-un punct N numit* **punctul lui Napoleon** *(după numele împăratului Franței Napoleon Bonaparte).*

Rezolvare :
Punctul lui Napoleon este tot un punct Jacobi particularizat (unghi de 30^0) *și demonstrația se realizează în mod analog cu cea dată pentru punctul Jacobi.*



$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{A_{\Delta ABO_1}}{A_{\Delta ACO_1}}\cdot\frac{A_{\Delta BCO_2}}{A_{\Delta BAO_2}}\cdot\frac{A_{\Delta CAO_3}}{A_{\Delta CBO_3}}=$$

$$\frac{AB\cdot BO_1\cdot\sin\left(B+30^0\right)}{AC\cdot CO_1\cdot\sin\left(C+30^0\right)}\cdot\frac{CB\cdot CO_2\cdot\sin\left(C+30^0\right)}{AB\cdot AO_2\cdot\sin\left(A+30^0\right)}\cdot\frac{AC\cdot AO_3\cdot\sin\left(A+30^0\right)}{CB\cdot BO_3\cdot\sin\left(B+30^0\right)}=1$$ → conform reciprocei teoremei lui Ceva avem AO_1 , BO_2 și CO_3 concurente într-un punct N.

Este numit **Punctul lui Napoleon** doarece acesta a acordat sume considerabile de bani pentru studiu și cercetare în universitățile din acea vreme.

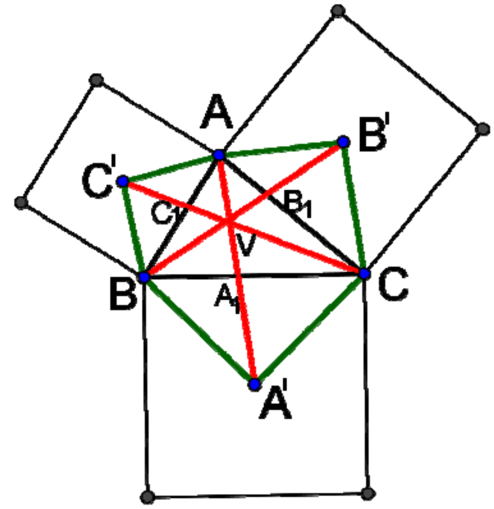
3) *Dacă pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele cu centrele în punctele A' , B' , C' , atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente într-un punct .*

Rezolvare :
Punctul de intersecție , notat cu V , este tot un punct Jacobi particularizat (unghi de 45^0) și demonstrația se realizează în mod analog cu cea dată pentru punctul Jacobi.

$$\frac{A_{\Delta ABA'}}{A_{\Delta ACA'}}=\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{BA\cdot BA'\cdot\sin\left(B+45^0\right)}{AC\cdot CA'\cdot\sin\left(C+45^0\right)}$$

$$\frac{A_{\Delta BCB'}}{A_{\Delta BAB'}}=\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{CB\cdot CB'\cdot\sin\left(C+45^0\right)}{AB\cdot AB'\cdot\sin\left(A+45^0\right)}$$

$$\frac{A_{\Delta ACC'}}{A_{\Delta BCC'}}=\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AC\cdot AC'\cdot\sin\left(A+45^0\right)}{BC\cdot BC'\cdot\sin\left(B+45^0\right)}$$



$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{A_{\Delta ABA'}}{A_{\Delta ACA'}}\cdot\frac{A_{\Delta BCB'}}{A_{\Delta BAB'}}\cdot\frac{A_{\Delta ACC'}}{A_{\Delta BCC'}}=$$

$$\frac{BA\cdot BA'\cdot\sin\left(B+45^0\right)}{AC\cdot AC'\cdot\sin\left(C+45^0\right)}\cdot\frac{CB\cdot CB'\cdot\sin\left(C+45^0\right)}{AB\cdot AB'\cdot\sin\left(A+45^0\right)}\cdot\frac{AC\cdot AC'\cdot\sin\left(A+45^0\right)}{BC\cdot BC'\cdot\sin\left(B+45^0\right)}=1$$ $\rightarrow$ conform reciprocei

teoremei lui Ceva avem AA' , BB' si CC' sunt concurente într-un punct V.

Acest punct V este cunoscut ca **Punctul lui Vecten.**

4) *Dacă Δ ABC are toate unghiurile mai mici de 120^0 și pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1 , ACB_1 și BCA_1, atunci :*

a) Cercurile circumscrise acestor triunghiuri construite au un punct T comun ;

b) Dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 , sunt concurente în punctul T;

c) $AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$;

d) Punctul T realizează minimul sumei MA + MB + MC , unde M este punct din planul (ABC).

Rezolvare:

a) Fie T punctul de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 , ACB_1.

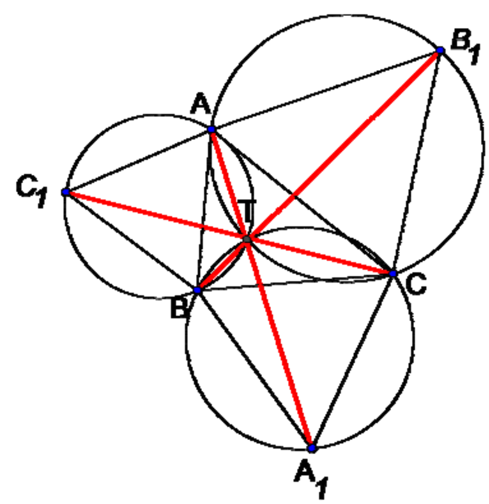
Patrulaterul $ATBC_1$ este inscriptibil ⇒

$m\sphericalangle(ATB) + m\sphericalangle(C_1) = 180^0$ ⇒

$m\sphericalangle(ATB) = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Patrulaterul $ATCB_1$ este inscriptibil ⇒

$m\sphericalangle(ATC) = 120^0$.



$m\sphericalangle(ATB) + m\sphericalangle(ATC) + m\sphericalangle(BTC) = 360^0$

(unghiuri formate în jurul punctului T)

⇒ $m\sphericalangle(BTC) = 120^0$ ⇒ patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil ⇒ punctul $T \in C(BCA_1)$

b) Din patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ $\Rightarrow m\sphericalangle(A_1TC) = 60^0 = m\sphericalangle(A_1BC)$

$m\sphericalangle(ATA_1) = m\sphericalangle(ATC) + m\sphericalangle(A_1TC) = 120^0 + 60^0 = 180^0 \Rightarrow A, T, A_1$ coliniare.

Analog B,T,B_1 coliniare și C,T,C_1 coliniare $\Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{T\}$

Punctul T de intersecție a dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 este o particularizare a *Punctului Jacobi* pentru unghi de 60^0, iar demonstrația se poate realiza cu ajutorul ariei triunghiului și reciproca teoremei Ceva.

c) $AA_1 = AT + TA_1$. Aplicând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ (Produsul diagonalelor într-un patrulater înscris în cerc este egal cu suma produselor laturilor opuse.) și știind că

$BC = CA_1 = A_1B$ (laturi în triunghi echilateral) $\Rightarrow TA_1 = BT + TC$, astfel $AA_1 = AT + BT + CT$.

Analog $BB_1 = AT + BT + CT = CC_1 = AA_1$.

d) Fie M un punct în planul triunghiului ABC $\Rightarrow AA_1 \le MA + MA_1$

Cel puțin unul din patrulaterele MAB_1C, MAC_1B, MBA_1C este convex. Fie acesta MBA_1C. Aplicând inegalitatea lui Ptolemeu (produsul diagonalelor într-un patrulater convex este mai mic sau cel mult egal cu suma produselor laturilor opuse) și știind că $BC = CA_1 = A_1B$ (laturi în triunghi echilateral)

rezultă : $MA_1 \le MB+MC \Rightarrow AA_1 \le MA + MB+MC$ și folosind rezultatul c) obținem

$AT + BT + CT \le MA + MB+MC$, cu egalitate numai dacă M=T.

Punctul T este cunoscut ca fiind **Punctul Torricelli-Fermat**
Evangelista Torricelli (1608-1647) a fost un matematician și fizician italian.
Pierre de Fermat (1601-1665) matematician francez. A adus contribuții deosebite în domeniul teoriei numerelor, geometriei analitice și a fost creator al calculului probabilităților.

Bibliografie :

Liviu Nicolescu , Vladimir Boskoff – ” Probleme Practice de Geometrie ”, Editura Tehnică , Bucureşti , 1990

Gheorghe Ţiţeica – ” Probleme de Geometrie ”, Editura Tehnică , 1981 (ediţie revizuită)

www.matematicienicelebri.ro
www.wikipedia.ro