

## Legi de compoziție

Test pentru clasa a XII-a. Rândul I.

Prof. Pop Adela, Colegiul Tehnic „Aurel Vlaicu”, Baia Mare

Se acordă 1p din oficiu

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

5p 
$$x \circ y = \frac{-1}{2}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{18}, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se verifice egalitatea  $x \circ y = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}, \forall x, y \in \mathbf{R}.$

b) Să se demonstreze că legea de compoziție "o" este asociativă.

c) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziție "o".

d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x \circ x = x.$

e) Să se demonstreze că  $H = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$  este parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție "o".

4p 2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \right\}.$

a) Să se demonstreze că  $A^2 = -5A$  și că  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 5ab).$

b) Să se demonstreze că orice matrice din G este inversabilă.

c) Să se rezolve ecuația  $X^2 = I_2,$  unde  $X \in G.$

Test pentru clasa a XII-a. Rândul II

1p oficiu

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

5p 
$$x \circ y = \frac{-1}{3}xy + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{12}, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Să se verifice egalitatea  $x \circ y = \frac{-1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}, \forall x, y \in \mathbf{R}.$

b) Să se demonstreze că legea de compoziție " $\circ$ " este asociativă.

c) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziție " $\circ$ ".

d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x \circ x \circ x = x.$

e) Să se demonstreze că  $H = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  este parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție " $\circ$ ".

4p 2. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  și mulțimea  $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}.$

a) Să se demonstreze că  $A^2 = -2A$  și că  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 2ab).$

b) Să se demonstreze că orice matrice din  $G$  este inversabilă.

c) Să se rezolve ecuația  $X^2 = I_2$ , unde  $X \in G.$