Dinamica matematicii,semnificatiile aplicarii ei in stiinta.

PROFESOR: PÎRVULESCU EUGENIA
SCOALA POPESTI,
ORAS MIHAILESTI,
JUD. GIURGIU

Este de inteles ca prin titlul referatului ne referim aici la structura matematicii "stiinta"si la reflectarea ei in structura matematicii scolare. In matematica scolara romaneasca, de multa vreme, structura matematicii stiinta este corect reprezentata. Aceasta nu exclude existenta unor opinii ce ar dori mai mult sau mai putin si chiar usoare oscilatii in jurul pozitiei de echilibru a programelor si a unor manuale. "Mai mult" inseamna aici dorinta de a face mai multa logica formala care sa o apropie de formalizarile acesteia: calculul propozitional si calculul cu predicate. Din alt unghi de vedere, "mai mult" inseamna dezvoltarea unor domenii ale matematicii scolare (de exemplu, geometria) intr-o structura de sistem deductiv semiformalizat. "Mai putin" inseamna aici reduceri drastice de demonstratii si chiar din rigoarea reprezentarii unor conceptii. Apreciem ca actuala selectare reprezinta o pozitie de echilibru deoarece incercarile spre "mai mult" declanseaza reactia spre "mai putin" si viceversa.

In diverse formalizari ale geometriei liceale se consemneaza o axioma L.U.L. –Daca doua triunghiuri au cate doua laturi respective congruente si unghiurile dintre ele congruente atunci triunghiurile sunt congruente. Prin demonstratii suficient de dificile se ajunge de aici la teoremele ce studieaza cazurile de congruenta U.L.U. si L.L.L. Aceasta succesiune se incadra intr-un sistem semiformalizat unde axiomele erau "adevaruri acceptate" iar teoremele "adevaruri demonstrate". Aceasta pozitie a programei, manualului si profesorului nu era integral acceptata de elevi, care isi eleboreaza criterii proprii de acceptabilitate, evidenta si naturaletia. Un elev (ajuns intre timp un bun professor de matematica) spunea "Ca sa stiu daca doua triunghiuri sunt congruente le masor cu rigla fiecare latura. Axioma ma obliga sa masor doar doua laturi, dar sa folosesc si raportul pentru a masura doua anume unghiuri. Dupa ce accept asta trebuie sa mai demonstrez inca doua teoreme pentru a accepta ce era de la inceput natural si evident." Nu sustinem ca elevul avea dreptate, ci doar ca exprima un punct de vedere. Merita oare efortul de a combate acest punct de vedere? Oare cum determina depresiunea acestor puncte de vedere, profesorii au trecut de cealalta parte a zonei de echilibru cerand: "sa dam fara demonstratie toate cele trei cazuri de congruenta." Suntem obligati sa discernem intre o matematica „de cercetare – descoperire "(MCD),o matematica ‚sedimenta"(MS) si o matematica „functionala"(MF).

MCD constituie partea cea mai dinamica a matematicii; in lumea larga apar sute de reviste ,numeroase congrese si simpozioane genereaza „Procedings"-uri voluminoase care consemneaza cercetari si descoperiri.Unele rezultate(cum ar fi relative recenta demonstrare a conjecturii lui Fermat)nici nu pot fi expuse in „note",necesand carti intregi.O oarecare posibilitate de orientare este asigurata de „revista de recenzii"(RR) si ele destul de numeroase.Mathematical Rewiews ,Zentralblatt,Referativnij Jurnal ,Bulletin Signaletique.Pentru un cercetator care si-a ales domeniul (adesea destul de „ingust”), „ informarea la zi” este insa o sarcina suficient de dificila.

Cei care privesc de departe si deplang pe matematecieni ca „ nu ar mai avea nimic nou de adaugat in stiinta matematica”nu au deloc dreptate ,dar este destul de greu sa fie convinsi de eroarea lor. MS ramane in mod necesar„in urma” MCD cu circa 10 ani.Intr-un anumit domeniu ,rezultatele recente din MCD,rapoarte la „sedimentari anterioare “ justifica si chiar impung conexari,restructurari,evidentieri de tehnici si procedee generale ce alcatuiesc tratate sau monografii.Apreciem ca ,in majoritatea cazurilor ,autorii monografiilor sunt chiar cei care au extins creative domeniul prin contributii in MCD. Este de inteles ca aparitia unei asemenea monografii invioreaza activitatea de cercetare in domeniu.

Poate ca similitudinea ce apare intre activitatile de cercetare si cele de invatare(semnalata de noi si altundeva)nu este complet aleatoare.Aceasta pare a fi o justificare de fond pentru incurajarea atitudinilor de cercetare la elevi si la profesori .Mai ales pentru profesori,termenul de cercetare include justificat si elaborarea analoagelor monografiilor-carti de matematica elementara destinate elevilor si profesorilor.Sustinem ca profesorii sunt bogati(nu materialiceste ,dar)prin ampla lor experienta didactica ; in revers,aplecarea spre zamislirea unei carti elucideaza aspecte care se dovedesc (in timp) utile activitatilor la clasa.MF tinde la consolidari definitive(ale matematicii create) in sistem unitar. Sa discernam aici cateva unghiuri de vedere care se completeaza reciproc.

a)Filozofia matematicii cauta raspunsuri la problemele privind :natura generala a cunoasterii matematice ,statutul entitatilor matematice ,rolul infinitului ,relatia intre matematica pura si cea aplicata ,dinamica matematicii,semnificatiile aplicarii ei in stiinta.

b)Fundamentele matematicii incadreaza diversele domenii ale matematicii *teorii logico-deductive* cu diverse grade de formalizare .

c)Metamatematica priveste matematica (actuala si potentiala)ca un sistem si studiaza probleme specifice ale acestui sistem:necontraditia-consistenta ,completitudinea-categoricitatea,minimalitatea,dedidabilitatea.

In 1874 a aparut monografia Mengenlehre ,in care Georg Canter pune bazele teoriei multimilor (numita ulterior teoria naiva a multimilor ,dar fara a acorda nici o nuanta peiorativa adjectivului subliniat).Pana spre sfarsitul secolului se constata ca multimile ofera posibilitatea de a edifica intreaga matematica ,punct de vedere ce preferam sa-l numim ansamblist (pornind de la cuvantul francez *ensemble*=multime).In jurul anului 1900 apar diverse antinomii sau paradoxuri generate de utilizarea conceptelor ansambliste.

Sa binevoim a considera multimea *M* a tuturor multimilor *.Prin definitie avem apartenenta M* € M *,situatie ce ne poate deranja .Sa convenim deci sa numim* cumsecade o multime A ce ne satisface aceasta situatie potentiala periculoasa ,deci pentru care avem *A nu apartine de A.In replica vom spune ca este necumsecade o multime B pentru care B € B.Suntem astfel indreptatiti sa consideram multimea b a multimilor cumsecade sa ne intrebam daca b este sau nu cumsecade .Cumsecadenia implica prin definitie b nu apartine de b;nonapartenenta exclude insa b din familia celor cumsecade implicand necumsecadenia :b € b.Si invers*

,daca b este necumsecade ,prin definitie b € b,dar apartenenta inseamna cumsecadenia ,deci b nu apartine de b .Suntem evident intr-o situatie paradoxala in care o propozitie p este simultan valida cu negatia sa ,'1p!

Este inutil sa spunem ca aceasta antinomie a aparut din cauza unei autoreferiri(ne-am referit cu acelasi termen la o multime si la elementele sale);am construit legitim o propozitie p si am dovedit inevocabil ca are loc inacceptibilitatea p↔1p. Anumite variante de evitare a antinomiilor au aparut axiomatizari ale teoriei multimilor .Putem cita aici „teoria tipurilor"a lui Bertrand Russel ,dar optiunile majoritare s-au indreptat spre mai consistent axiomatizare data in 1908 de catre E .Zermelo.De aici inainte,o edificare ansamblista a matematicii aparea drept temeinica daca se baza nu pe teoria naiva a multimilor,ci pe o teorie axiomatic formalizata a multimilor. Prin aceasta restrictie au fost evitate numeroase antinomii deja evidentiate dar nu s-a putut proba ca pericolul aparitiei antinomiilor este definitiv indepartat din matematica .Este desigur de dorit sa se ajunga la o fondare a matematicii care sa evite definitv asemenea pericole spre a nu fi necesare reconsolidarii ulterioare de temelii. Situatia a determinat constituirea unor probleme metateoretice de cercetare ce s-au consolidat treptat in :logicism,formalism,intuitionism.Toate aceste programe s-au conturat si ca filozofii ale matematicii .

Logicismul a fost creat si dezvoltat de G.Frege,B.Russell,A.Churc,R.Carnap s.a .Notiunile matematice sunt considerate drept entitati ne-spatiale,ne-mentale,ne-lingvistice si a-temporale ce exista in sine ,pot fi cunoscute de mintea umana prin intuitii neempirice .Sarcina matematicii este de a descoperi aceste entitati si de a clarifica relatiile logice intre ele .In linii mari ,se poate spune ca logicismul incearca reducerea matematicii la logica .Prin constatarea ca logicii trebuie sa i se adauge in teoria multimilor ,logicismul a fost serios zdruncinat ,deoarece axiomele acestei teorii sunt mai putin evident si certe decat majoritatea teoremelor matematice derivate in ele.

Formalismul a fost creat si puternic dezvoltat de David Hilbert punandu-se la baza *limbajul matematic* .Programul prevede :a) axiomatizarea matematicii clasice ;b) expunerea ei sub forma unor calcule; c)demonstrarea noncontradictiei prin cercetari asupra acestor calcule. Hilbert considera ca ,,infinitul nu este nicaieri de gasit in realitate, oricare ar fi experientele, observatiile la care am apela si orice stiinta am utiliza''. *Domeniul real* al matematicii il constituie configuratiile finite de semne concrete si este extins la un *domeniu ideal* ce cuprinde si infinitiul – doar ca idee ce permite prezentari avantajoase ale teoriei.Programul hilbertian prevede astfel – pentru diverse domenii ale matematicii – elaborarea unor *teorii axiomatice formalizate noncontradicorii si complete,* deziderat dovedit de K. Godel ca irealizabil .

Intuitionismul a fost intemeiat de L.E.J Brouwer pe baza ideilor lui E. Borel , H. Poincare s.a . Acesta considera matematica drept o activitate intuitiva de contructie compet autonoma, dependenta de limbaj si logica. Un reprezentant de seama al intuitionismului , A. Heyting precizeaza : ,, Scopul pe care si-l propune matematicianul intuitionist este: practicarea matematicii ca o functie naturala a intelectului, ca o activitate libera , vie a gandirii. Pentru el, matematica este un produs al spiritului uman. Limbajul , atat cel comun cat si cel formalist, ii este necesar numai in scopul comunicarii , adica pentru a oferi altora sau sie insusi spre reflectie ideile matematice. O asemenea insotire lingvistica nu este o imagine a matematicii , cu atat mai putin insasi matematica''.

Brouwer precizeaza punctul intuitionist de vedere asupra relatiilor matematicii limbajul si logica considerand urmatoarele studii in creatia matematicii:(1) creatia matematica intuitiva;(2) „pararela lingvistica a matematicii'' = limbajul, vorbirea si scrierea matematica;(3) "cercetarea matematica a limbajului";(4) logica matematica neformalizata = "sistem mathematic de ordinal doi";(5) introducarea limbajului simbolic in gandirea matematica = "stadiul simbolic al matematicii de ordinal doi" (Peano, Russel);(6) "studiul matematic al limbajului simbolic" (Hilbert)etc. Singurul stadiu care reprezinta matematica adevarata, pura, autentica este primul; acestei matematici ii corespunde o realitate in sine, independenta, echivalenta cu acele constructii mentale intuitive, ireductibile. La randul ei, logica nu poate intemeia matematica, intrucat ea(inclusive logica matematica) intervine la un studio interior al metamorfozei suferite de realitatea matematica, atunci cand se instituie studiul mathematic al limbajului matematic, adica atunci cand se concepe limbajul matematic ca ordine si regularitate. Studiul doi, al limbajului, nu ne ofera direct si nedistorsionat aceasta realitate matematica originara, nu ne restituie fara posibile erori si inexactitati gandirea originara, autentica, prezentata in studiul initial. Limbajul nu joaca in "edificiul gandirii matematice" decat "rolul unei tehnici - niciodata insa infailibila sau exacta" – de a memoriza constrcuctiile matematice si de a le sugera altor oameni; astfel incat limbajul mathematic, prin sine, nu poate crea niciodata noi sisteme matematice. La randul ei, logica nu poate intemeia matematica, intrucat ea(inclusive logica matematica) intervine la un studiu ulteriol al metamorfozei suferite de realitatea matematica, atunci cand se instituie studiul matematic al limbajului matematic, adica atunci cand se concepe limbajul mathematic la ordine si regularitate. Folosind terminologia introdusa de noi mai sus, limbajul si logica nu intervin in creatia matematica, si doar pentru comunicare in MCD si apoi im MS.

Intuitionismul corespunde, dupa Brower, unei anumite etape a evolutiei gandirii matematice, etapa ce urmeaza "perioadei observationale" (in care matematica a fost considerata " functional daca nu existential, dependenta de logica, iar logica insasi a fost considerata autonoma"), "vechiului formalism" (Dedekind, Cantor, Peano, Russel s.a), "pre-intuitionalismului" (Poicaré, Borel, Lebesgue) si "noului formalism" (Hilbert). "Situatia" lasata de aceste momente anterioare se caracterizeaza prin aceea ca, "pentru intreaga matematica, regulile logicii clasice erau acceptate ca ajutoare solide in cautarea adevarurilor exacte". "Interventia" intuitionismului "separa complet matematica de limbajul matematic, in particular de fenomenele de limbaj descrise de logica teoretica, si recunoaste ca matematica intuitionista este o activitate nelingvistica esentiala a intelectului".

Evolutia ulterioara a intuitionismului matematic s-a desfasurat pe urmatoarele directii: (i) elaborarea logicii intuitioniste (A.Heyting) si constructia unei semantici adecvate acesteia(S.Kripke); (ii) construirea unor explicatii formalizate pentru o serie de concepte-cheie ale intuitionismului: demonstratia constructive (E.W.Beth, D.Scott), "subiect creativ" (J.Mylhill) s.a.; (iii) aparitia unor noi variante-post-intuitioniste ale matematicii constructive (A.A.Markov, P.Lorenzen, E.Bishop, H.Wang s.a.); formularea unor teoreme care indica traductibilitatea reciproca a unor rezultate intuitioniste si clasice (K.Gödel, G.Kriesel).

Aceste tendinte indica o modificare de optica in cadrul studiilor intuitioniste (ca si al filozofiei matematici, in general): de la incercarea de a determina, natura obiectelor matematice etc., la cercetari mai direct legate de practica matematica, de natura demonstratiilor acestea. De astfel, cea mai substantiala contributie in cadrul programului intuitionist in matematica din ultimii ani, monografia lui E.Bishop, *Foundations of Constructive*

Analysis, intentioneaza mai curand sa gaseasca versiuni constructive si demonstratii constructive teoremelor matematicii clasice, decat sa construiasca o matematica noua, pe principii cu totul diferite de cele clasice.

Pentru a preciza structura matematicii este esential conceptul de sistem deductiv sau teorie deductive.O astfel de teorie T este data de:

1° un sistem de notiuni si de relatii *N={Na}(*diferentierea de termini avand caracter lingvistic);

2° un sitem *P={Pc}* de propozitii corect construite ,exprimate (exclusiv) cu elemente din *N.*

3° un sistem *C* ={Cd}de reguli de constructie;

4° un sistem *D* ={De}de reguli de deductie;

5° un sistem *A*={Af}de propozitii adevarate,ce indeplineste urmatoarele conditii:

a)*A* inclus *P*

b)*P* este stabila in raport cu *C* (adica prin aplicari de reguli de constructie unor propozitii Pc se obtin propzitii corect construite):*C[P]* inculs *P*

c) *A* este stabila in raport cu *D*:*D*[*A]*inclus *A*.

Chiar daca , in aceasta prezentare ,notiunea de teorie deductiva este prea generala(si deci relativ vaga) ea poate fi completata spre a ajunge la conceptul de teorie matematica deductiva, acceptabil prin consensul matematicienilor.

Axiomatizarea construita de Euclid pentru geometrie este un exemplu de teorie neformalizata . Modul in care notiunile primare –punct, dreapta, a fi intre … etc.-sunt abstrase dintr-o realitate obiectiva este mai putin relevant; explicatiile autorului in acest sens sunt de inteles si nu pot fi intinate de critici rauvoitoare . Axiomele constituie adevaruri pe care le putem accepta ca evidente, dar , peste aceasta , meritul alegerii lor este dat de posibilitatea constructiei logico-deductive a teoremelor.

O teorie axiomatica se numeste semiformalizata , daca partea sa specifica este formalizata, iar partea logica este neformalizata.Aceasta inseamna ca notiunile si relatiile primare sunt niste simboluri date initial in cadrul teoriei, iar axiomele se considera ca propozitii adevarate date de la inceput in cadrul teoriei. Logica considerata este logica bunului-simt matematic. Intr-o asemenea teorie axiomatica, in care partea specifica este bazata pe intuitie, rationamentele vor fi suficient de riguroase. Acesta este motivul pentru care majoritatea teoriilor matematice actuale sunt teorii axiomatice semiformalizate. In aceasta situatie se gasesc algebra, geometria , analiza etc.

Ca exemplu de teorie axiomatica prezentam sistemul axiomatic a lui Peano pentru numerele naturale. Notiunile primare sunt: zero, numar natural si succesor.Axiomele sunt uramtoarele:

A1. Zero este numar natural

A2. Orice numar natural admite un succesor unic, care este tot numar natural

A3. Zero nu este succesorul nici unui numar natural.

A4. Daca succesorii a doua numere naturale coincid , atunci numerele considerate coincid.

A5.Daca o multime de numere naturale contine zero si pentru fiecare numar din aceasta multime succesorul sau apartine multimii,atunci multimea considerata coincide cu multimea tuturor numerelor reale.

Se numeste *structura matematica* o multime, prevazuta cu anumite relatii, astfel incat elementele sale si relatiile date satisfac un sistem de axiome.

Teoria axiomatica a unei structuri matematatice este teoria sistemului axiome considerat , in care notiunile si relatiile primare sunt elementele multimii si relatiile date. Problemele de metateorie se aplica acestei teorii. Notiunea de structura matematica este utilizata de grupul de matematicieni francezi, Bourbaki, pentru clasificarea teoriilor matematice, clasificare care merge de la tipurile simple de teorii matematice(cum sunt structurile algebrice) la tipurile complexe(cum ar fi analiza matematica si geometria diferentiala). Se obtine astfel un edificiu unitar, bazat pe metoda axiomatica.

Pornind de la o teorie axiomatica A putem sa o dezvoltam in principiu prin doua metode:1° sa edificam pe ea o noua teorie axiomatica B, sau 2° sa construim o structura matematica derivata .

Bibliografie:

Antonie, G.ST – Varia matematica. Ed. Albastros, 1987.

Birzea, C.(coord.) – Cartea alba. Inst. de St. ale educatiei, Min. Inv., Bucuresti, 1993.

Branzei, D & R - Metodica predarii matematicii, Ed. Paralela45.

Cerchez, M. – Aplicatii ale matematicii in practica. EDP., 1970.

Cosmovici, N; Iacob, L. – Psihologia scolara. Ed. Polirom, Iasi, 1998.