Soluţiile unor probleme de analiză date la

examenul de admitere în facultăţile de matematică

Profesor Tănasie Elena

1. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$, unde $a<b$.

<u>Soluţia 1:</u>

Facem substitutia $x=t+\frac{a+b}{2}, t\in[-\alpha,\alpha]$, unde $\alpha=\frac{b-a}{2}$.

Atunci $x-a=\alpha+t$ si $b-x=\alpha-t$, deci

$$I_n=\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha-t)^n\,(\alpha+t)^n dt=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2-t^2)^n dt=$$

$$=2\int_0^{\alpha}(\alpha^2-t^2)^n dt.$$

Folosind metoda integrării prin părti, găsim o relaţie de recurenţă intre termenii şirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

$$I_n=2t(\alpha^2-t^2)^n|_0^{\alpha}+4n\int_0^{\alpha}t^2(\alpha^2-t^2)^{n-1}dt=-4n\int_0^{\alpha}(\alpha^2-t^2-\alpha^2)(\alpha^2-t^2)^{n-1}dt=$$

$$=-4n\int_0^{\alpha}(\alpha^2-t^2)^n dt\;+4n\alpha^2\int_0^{\alpha}(\alpha^2-t^2)^{n-1}dt=-\,2nI_n+2n\alpha^2 I_{n-1}.$$

De unde $I_n=\frac{2n}{2n+1}\alpha^2 I_{n-1}$ sau $I_n=\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-1}, \forall n\geq 2$.

Avem $I_1=\int_a^b (x-a)(b-x)dx=\frac{(b-a)^3}{6}$, deci pentru $n\geq 2$ avem:

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-2}=$$

$$=\cdots=\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2+1}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot I_1=$$

$$=\frac{2^{n-1}\cdot(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n-2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6}=\frac{(b-a)^{2n+1}\cdot n!}{2^n\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

Deci $I_n=(b-a)^{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Avem de calculat $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}$. Notăm $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ şi avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{1}{4}$$

Deci, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{4}$ si atunci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(b-a)^{2n+1}\cdot a_n}=$

$=\lim_{n\to\infty}\left[(b-a)^{2+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{a_n}\right]=\frac{(b-a)^2}{4}$.

Soluția 2:

Fie $c=\frac{a+b}{2}$ si $\alpha=\frac{b-a}{2}$. Avem $c-a=b-c=\alpha$.

Este adevarată inegalitatea:

$$(x-a)(b-x)\geq\alpha(x-a),\forall x\in[a,c]$$

Deci,

$$\int_a^c (x-a)^n\,(b-x)^n dx\geq\alpha^n\int_a^c (x-a)^n dx=\alpha^n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^c=\alpha^n\cdot\frac{(c-a)^{n+1}}{n+1}=$$

$=\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1},\forall n\geq 1.$

Analog, avem $(x-a)(b-x)\geq\alpha(b-x),\forall x\in[c,b]$.

Deci,

$$\int_c^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\geq\alpha^n\int_c^b (b-x)^n dx=-\alpha^n\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_c^b=\alpha^n\frac{(b-c)^{n+1}}{n+1}=\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1},$$

$\forall n\geq 1.$

Aşadar, $\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\geq\frac{2\alpha^{2n+1}}{n+1},\forall n\geq 1.$ (1)

Se observă că $(x-a)(b-x)\leq\alpha^2,\forall x\in[a,b]$.

Deci, $\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\leq\alpha^{2n}\int_a^b dx=\alpha^{2n}(b-a),\forall n\geq 1.$ (2)

Din (1)si (2) rezultă

$$\frac{2^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\cdot\alpha^{2+\frac{1}{n}}\leq\left(\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\leq\alpha^2(b-a)^{\frac{1}{n}},\forall n\geq 1$$

de unde, prin trecere la limită dupa $n\to\infty$, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (x-a)^n\,(b-x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\alpha^2=\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Soluția 3:

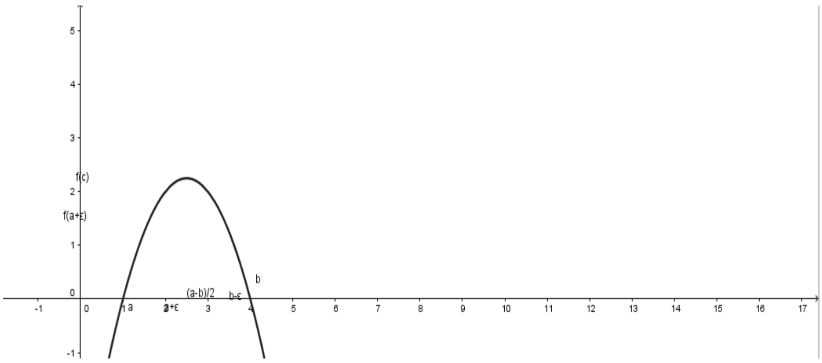
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-a)(b-x)$ si $c=\frac{a+b}{2}$.

$f(x)=-x^2+(a+b)x-ab$ şi evident avem $f(x)\leq\sup f(t)=f(c),\forall x\in[a,b]$.

Deci, $\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(c)\left(\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{n}} = f(c)(b-a)^{\frac{1}{n}}$ (1)

Fixam $0 < \varepsilon < \alpha = \frac{b-a}{2}$.

Atunci avem $f(a+\varepsilon) = f(b-\varepsilon) \leq f(x), \forall x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Vezi figura.



Deci,

$\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq\ f(a+\varepsilon)\left(\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{n}} = f(a+\varepsilon)\cdot(b-a)^{\frac{1}{n}}$ (2)

Fie acum $\varepsilon_n \in (0,\alpha), \varepsilon_n \to \alpha$ fixati.

Din (1) si din (2), in care am pus $\varepsilon = \varepsilon_n$, obținem:

$$f(a+\varepsilon_n)(b-a)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(c)(b-a)^{\frac{1}{n}}, \forall n \geq 1 \ (3)$$

Trecând la limită in $(3), n \to \infty$ şi ţinând seama că $\lim_{n\to\infty} f(a+\varepsilon_n) =\ f(a+\varepsilon) =\ f(c)$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} =\ f(c) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Admitere Facultatea de Matematică, Universitatea Bucuresti, 1986

2. Fie funcţia f:R→R

f(x)= max(sinx, $\boldsymbol{\lambda}$ + cosx), ∀ $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$

Să se determine valorile lui $\boldsymbol{\lambda}$ pentru care f este derivabilă pe R.

Soluţie:

Se observă că funcţia f este periodică cu perioada principală $2\,\pi$. Deci este suficient să considerăm restricţia funcţiei f la intervalul $[0,2\,\pi]$.

Fie g:[0,2 π] →R, g(x)= $\lambda + cosx - sinx$

Avem g'(x)= -sinx-cosx si g'(x)=0 ⟺ tgx= -1 ⇒ $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Pentru x= $\frac{3\pi}{4}$, avem g(x)= $\lambda - \sqrt{2}$ minim pentru g.

Pentru x= $\frac{7\pi}{4}$, avem g(x)= $\lambda + \sqrt{2}$ maxim pentru g.

Rezultă $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}\ \forall\, x \in [0,2\,\pi]$.

Dacă $\lambda \geq \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda + cosx \geq sinx, \forall\, x \in [0,2\,\pi]$, deci f(x) = $\lambda + cosx\ \forall\, x \in [0,2\,\pi) \Rightarrow f\ derivabil$ă $peste\ tot.$

Daca $\lambda \leq \sqrt{2} \Rightarrow g(x) \leq 0 \Rightarrow \lambda + cosx \leq sinx, \forall\, x \in [0,2\,\pi)$, deci f(x) = $sinx\ \forall\, x \in [0,2\,\pi) \Rightarrow f\ derivabil$ă $peste\ tot.$

Fie $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Deoarece $\lambda - \sqrt{2} < 0\ si\ \lambda + \sqrt{2} > 0\ si\ g\ este\ continu$ă $atunci\ ecua$ţ$ia\ g(x) = 0\ are\ o\ solutie\ in\ intervalul\ \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) (prop.\,lui\ Darboux)$

Fie aceasta a. Pentru $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, a\right)$ avem g(x)<0, deci f(x)=sinx, iar pentru $x \in \left(a, \frac{7\pi}{4}\right)$ avem g(x)≥ 0, deci f(x)= $\lambda + cosx$

Deci:

$$f(x)=\begin{cases} sinx, x \in \left(\frac{3\pi}{4}, a\right) \\ \lambda + cosx, x \in \left(a, \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Funcţia f este continuă in x=a, dar nu este derivabilă in acest punct intrucât $f'_s(a)$=cosa si $f'_d(a)$=-sina si daca $f'_s(a) = f'_d(a) \Rightarrow a \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}, absurd$ deoarece $a \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Deci pentru $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$functia f nu este derivabilă pe :[0,2 π].

In concluzie, f este derivabilă pe R dacă si numai dacă $\lambda \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Admitere Facultatea de Matematica, Universitatea Bucuresti, 1985

3.Să se arate ca există o unică funcţie f: [0,+ ∞)→R satisfăcând $(f(x))^3$+ xf(x)=1

, $\forall\, x \in [0, +\infty)$. Să se arate că f este derivabilă şi că f'(x)=$\frac{-f(x)}{3f^2(x)+x}$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$.

Soluţie:

Fie funcţia f_x:R → R, $f_x(y)=y^3+xy-1$. Avem $f_x(0)=-1$ şi $f_x(x+1)=$ $(x+1)^3+x(x+1)-1=$ $x[(x+1)^2+x(x+1)+1]+x(x+1)\geq 0$, intrucât $x\geq 0$.

Pentru x>0, avem $f'_x(y)=3y^2+x>0$, $\forall\, x \in R \Longrightarrow fx$ este strict crescătoare . In concluzie , $\forall\, x$ ∃! f(x) astfel incat $f^3(x)+xf(x)=1$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$ si f(x) $\in (0, x+1]$.

Vom arăta acum că funcţia f este continuă pe $[0, +\infty)$.

Considerăm un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset [0, +\infty)$ convergent către $x \geq 0, cu\ x_n \neq x, \forall\, x \in N^*$

Din $f^3(x_n) + x_n f(x_n) = 1\ si\ f^3(x) + xf(x) = 1\ se\ ob\c{t}ine$:

$$\big(f(x_n) - f(x)\big)\big(f^2(x_n)\big) + f(x_n)f(x) + f^2(x)) + x_n f(x_n) - xf(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\big(f(x_n) - f(x)\big)\big(f^2(x_n)\big) + f(x_n)f(x) + f^2(x)) + x_n) = f(x)(x - x_n)(1)$$

Rezultă că dacă $x_n > x$ atunci $f(x_n) < f(x)$. Deci f este descrescătoare.

Din (1) se obtine

$| f(x_n) - f(x) \Big|= \frac{|f(x)||x-x_n|}{f^2(x_n)+f(x_n)f(x)+f^2(x)+x_n} < \frac{|x-x_n|}{f(x)},\Big)$ (2)

Trecând la limită după n in (2) rezultă că

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

Din relaţia (1) se obţine

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = -\frac{f(x)}{f^2(x_n) + f(x_n)f(x) + f^2(x_n) + x_n}$$

Din continuitatea lui f in punctul x rezultă

f'(x)= $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} = -\frac{f(x)}{3f^2(x)+x}$

Admitere Facultatea de Matematica, Universitatea Bucuresti, Sesiunea speciala, echipa olimpica, 1989

4.Se consideră funcţia f :R→R, f(x)=$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$

Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f. Să se arate că nu există $\alpha \in R$ astfel incât funcţia g:R→R, unde g(x)= max($\alpha x, f(x)$) să aibă aceleaşi puncte de inflexiune ca şi f.

Soluţie:

Funcţia f este derivabilă de o infinitate de ori pe A=R\{-1,1}

Pentru $\forall\ x \in A$ avem:

f'(x)= $\frac{1}{3}\left((x-1)^{-\frac{2}{3}}+(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right)>0$

f''(x)=- $\frac{2}{9}\left((x-1)^{-\frac{5}{3}}+(x+1)^{-\frac{5}{3}}\right)$

Vom scrie pe f''(x) sub forma

f''(x)= $-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}\right)=\frac{-2}{9a^5b^5}(a+b)(a^4-a^3b+a^2b-ab^3+b^4), unde\ a=\sqrt[3]{x-1}\ si\ b=\sqrt[3]{x+1}$

Cum $a^4-a^3b+a^2b-ab^3+b^4>0\ dac$ă a şi b nu sunt simultan nule ,

semnul lui f''(x) va fi dat de expresia

$$-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=$$

$$-\frac{4}{9}x\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Cu alte cuvinte semnul este dat de expresia $\frac{-x}{x^2-1}$ şi avem tabelul:

x	-∞		-1		0		1		+∞
f''(x)		+++++++++++++	|	----------------	0	+++++++++++	|	---------------------------	

Ecuaţia f''(x)=0 are unica soluţie x=0 şi x=0 este punct de inflexiune pentru f.

Apoi, deoarece f este o funcţie continuă putem aplica o consecinţă a teoremei lui Lagrange şi obţinem f'(-1)= $\lim_{x\to-1} f'(x)=+\infty$ si f'(1)= $\lim_{x\to1} f'(x)=+\infty$.

Aşadar şi punctele x=-1 si x=1 sunt puncte de inflexiune pentru funcţia f.

Punctele de inflexiune sunt {-1,0,1}.

Pentru a doua cerinţă vom observa că dacă $\alpha = 0$ avem $\max(\alpha x, f(x)) = f(x) pentru\ x \geq 0\ si \max\left(\alpha x, f(x)\right) = 0\ \ pentru\ x < 0$.

Aşadar in acest caz toate punctele x<0 sunt puncte de inflexiune pentru g si nu numai -1 care este singurul punct de inflexiune negativ al lui f.

Daca $\alpha > 0$ atunci $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{f(x)} = +\infty$, deci există un $x_0>0$ cu proprietatea $\alpha x > f(x), \forall\ x > x_0$. Atunci g(x)= αx, pentru $x>x_0$ deci toate punctele $x>x_0$ sunt puncte de inflexiune pentru g şi nu numai 1 care este singurul punct de inflexiune pozitiv al lui f.

Cazul $\alpha < 0\ se\ tratează\ analog$.

Admitere Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucuresti, 1989