Legătura dintre poligoanele regulate, grupul claselor de resturi şi rădăcinile complexe ale unităţii

prof Iordache Ana Maria Carmen
Liceul Tehnologic„Virgil Madgearu''

O primă observaţie care se impune este aceea că atât mulţimea claselor de resturi modulo n, { $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, … $\widehat{n-1}$ }, dotată cu operaţia de adunare, cât şi mulţimea rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii, { $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ }, dotată cu operaţia de înmulţire, precum şi mulţimea rotaţiilor poligonului regulat cu n laturi în jurul centrului sau care lasă poligonul "pe loc" { $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ }, dotată cu produsul rotaţiilor formează structuri de grup comutativ, finite şi ciclice. Ba mai mult, cele trei grupuri sunt izomorfe, între ele putându-se stabilii nişte corespondenţe bijective, ele fiind la fel de bogate în elemente, fiecare conţinând câte n elemente şi de asemenea, efectul legii de compoziţie dintr-un grup asupra elementelor acestuia este acelaşi cu efectul celeorlalte legi de compoziţie asupra elementelor celorlalte grupuri (notând la fel elementele care se corespund prin izomorfism şi întocmind tabelele legilor de compoziţie se va constată că aceste tabele sunt identice).

Aplicaţia f : { $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, … $\widehat{n-1}$ } → { $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ }

de forma $f(\hat{k}) = x_k$ stabileşte un izomorfism între grupul claselor de resturi modulo *n*, *n* ∈ *Z*, şi grupul rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii.

Într-adevăr, evident, ea este bijectivă şi în plus

$$f(\hat{k} + \hat{l}) = f(\hat{k}) \cdot f(\hat{l})$$

deoarece $f(\hat{k} + \hat{l}) = f(\widehat{k+l}) = f(\hat{m}) = x_m$ unde *m* este restul împărţirii lui *k*+*l* prin *n*, iar $f(\hat{k}) \cdot f(\hat{l}) = x_k \cdot x_l = x_{k+l} = f(\widehat{k+l}) = f(\hat{m})$ unde *m* reprezintă restul împărţirii lui *k*+*l* prin n.

De asemenea, aplicaţia g : { $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ } → { $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ } de forma $g(r_k) = x_k$ este izomorfism între grupul rotaţiilor poligonului regulat cu *n* laturi amintit şi grupul rădăcinilor complexe de ordinul *n* ale unităţii.

Bijectivitatea aplicaţiei *g* este evidentă, iar

$g(r_k \cdot r_l) = g(r_k) \cdot g(r_l)$ rezultă din:

$g(r_k \cdot r_l) = g(r_{k+l}) = g(r_m) = x_m$

$$g\,(r_k)\cdot g\,(r_l) = x_k \cdot x_l = x_{k+l} = x_m$$

Aplicaţia $h : \{ r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \} \to \{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots \widehat{n-1} \}$ de forma $h\,(r_k) = \hat{k}$ este un izomorfism între grupul rotaţiilor poligonului regulat cu n laturi şi grupul claselor de resturi modulo n despre care am vorbit.

Într-adevăr, evident, ea este bijectivă , deoarece:

1. Este injectivă : $h\,(r_m) = h\,(r_n) \Rightarrow \hat{m}=\hat{n} \Rightarrow m=n \Rightarrow r_m=r_n$

2. Este surjectivă: pentru oricare ar fi $\hat{p} \in \{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots \widehat{n-1} \}$, $\exists\ r_q \in \{ r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \}$ *a.î.* $h\,(r_q) = \hat{p}$, adică $\hat{q}=\hat{p} \Rightarrow q=p \Rightarrow \exists\ r_q=r_p \in \{ r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \}$

Morfismul rezultă din relaţia următoare:

$$h(r_p\cdot r_q)=h(r_p)+h(r_q) \Leftrightarrow h(r_{p+q})=\hat{p}+\hat{q} \Leftrightarrow \widehat{p+q}=\hat{p}+\hat{q}$$

Aceste considerente ne permit ca în tratarea unor probleme dintr-un anumit domeniu al matematicii să ne sprijinim pe probleme asemănătoare din alt domeniu al matematicii, în scopul uşurării studiului problemelor respective. Astfel, unele probleme privind calculul şi construcţia elementelor unui poligon regulat sunt, facilitate de studiul rădăcinilor complexe ale unităţii. În acest sens, să considerăm un cerc de centru O şi de rază R pe care să presupunem că l-am împărţit în n arce congruente prin punctele de diviziune $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$.

Să raportăm configuraţia noastră la un sistem de axe perpendiculare Ox şi Oy, având originea în centrul cercului şi astfel încât direcţia pozitivă a axei Ox să treacă prin punctul M_0 (fig.1). Construim şi cercul cu centrul în O şi cu rază egală cu unitatea. Unind centrul O cu punctele $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$, de pe primul cerc obţinem la intersectia razelor $|OM_0|, |OM_1|, |OM_2|, \dots, |OM_{n-1}|$, cu cercul de raza 1 punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ care vor reprezenta vârfurile unui poligon regulat tot cu n laturi.

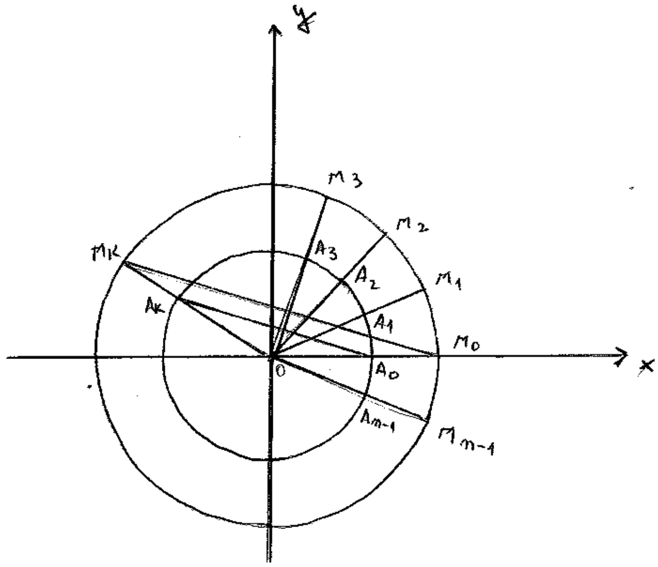

fig .1

Să notăm L_{nk} şi A_{nk} latura şi apotemă poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază *R* astfel încât fiecare latură subîntinde câte *k* arce. Vom nota latura şi apotema corespunzătoare din cercul de rază *1* cu l_{nk}, respectiv a_{nk}.

Pe baza asemănării triunghiurilor ΔM_0OM_k *şi* ΔA_0OA_k, scriind proporţionalitatea laturilor şi apotemele vom obţine:

$$\frac{L_{nk}}{l_{nk}} = \frac{A_{nk}}{a_{nk}} = \frac{R}{1}$$

de unde rezultă că $L_{nk} = R \cdot l_{nk}$ *şi* $A_{nk} = R \cdot a_{nk}$.

Aşadar, calculul elementelor poligonului regulat cu *n* laturi înscris într-un cerc de rază dată *R* se reduce la calculul elementelor corespunzătoare ale poligonului regulat cu acelaşi număr de laturi înscris în cercul de rază *1* – problema asemănătoare cu: "rezolvarea oricărei ecuaţii binome $x^n = a$, se reduce la rezolvarea ecuaţiei $x^n = 1$, adică la aflarea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii".

Coordonatele punctului A_k sunt $(\cos\frac{2k\pi}{n} ; \sin\frac{2k\pi}{n})$, iar afixul corespunzator lui este numărul complex $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, adică una din rădăcinile complexe de ordinul *n* ale unităţii. Prin urmare, afixele vârfurilor poligonului regulat $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ înscris în cercul de rază *1* sunt rădăcinile $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de ordinul n ale unitatii, iar afixele picioarelor apotemelor corespunzatoare laturilor $|A_0A_1|, |A_0A_2|, \ldots, |A_0A_k|, \ldots, |A_0A_{n-1}|$ sunt:

$$\frac{1+x_1}{2}, \frac{1+x_2}{2}, \ldots \frac{1+x_k}{2}, \ldots, \frac{1+x_{n-1}}{2}$$

Rezultă deci că:

$$l_{nk} = |x_k\text{-}1| \quad si\ a_{nk} = \left|\frac{1+x_k}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot |x_k + 1|$$

Iar s_{nk} (aria poligonului în cazul în care este convex) este:

$$s_{nk} = \frac{p_{nk} \cdot a_{nk}}{2} = \frac{n}{4} \cdot |x_k^{\,2} - 1|$$

unde p_{nk} este perimetrul poligonului respectiv.

Ţinând cont de forma trigonometrică a rădăcinilor complexe ale unităţii, deducem următoarele formule pentru l_{nk}, a_{nk}, şi s_{nk}:

$$l_{nk} = |x_k\text{-}1| = |cos\,\frac{2k\pi}{n} + isin\,\frac{2k\pi}{n} - 1| =$$

$$= \sqrt{\left(cos\,\frac{2k\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(sin\,\frac{2k\pi}{n}\right)^2} = \sqrt{cos^2\frac{2k\pi}{n} - 2cos\,\frac{2k\pi}{n} + 1 + sin^2\frac{2k\pi}{n}} =$$

$$= \sqrt{2 - 2cos\,\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt{2(1 - cos\,\frac{2k\pi}{n})} = \sqrt{4sin^2\frac{k\pi}{n}} = 2sin\frac{k\pi}{n}\,;$$

Deci $l_{nk} = 2sin\frac{k\pi}{n}$.

$$a_{nk} = \frac{1}{2}|x_k + 1| = \frac{1}{2}|cos\,\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n} + 1| = \frac{1}{2}\sqrt{(cos\,\frac{2k\pi}{n} + 1)^2 + (sin\,\frac{2k\pi}{n})^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\,(1 + cos\,\frac{2k\pi}{n})} = \frac{1}{2}\sqrt{4cos^2\frac{k\pi}{n}} = cos\frac{k\pi}{n}\,.$$

Deci $a_{nk} = cos\frac{k\pi}{n}$.

În sfârşit:

$$s_{nk} = \frac{p_{nk} \cdot a_{nk}}{2} = \frac{1}{2}\,n \cdot 2 \cdot sin\frac{k\pi}{n} \cdot cos\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2}\,sin\frac{2k\pi}{n}\,.$$

Folosind relaţiile $L_{nk}=R \cdot l_{nk}$ şi $A_{nk}=R \cdot a_{nk}$ deduse anterior, găsim latura, apotema, respectiv aria poligonului regulat convex cu n laturi înscrise în cercul de rază R, fiecare latura subîntinzând câte k arce:

$$L_{nk} = 2Rsin\frac{k\pi}{n} \qquad A_{nk} = Rcos\frac{k\pi}{n} \qquad S_{nk} = \frac{nR^2}{2}\,sin\frac{2k\pi}{n}$$