Teoria combinărilor

Păduraru Elena - Școala Gimnazială „George Enescu“ Moinești

1. Fie mulţimea $A = \{a, b, c\}$ şi să considerăm toate submulţimile sale. Acestea sunt:
1) mulţimea vidă: $\varnothing$;
2) submulţimi având fiecare câte un element: {a}, {b}, {c};
3) submulţimi având fiecare câte două elemente: {a, b}, {a, c}, {b, c};
4) mulţimea totală: {a, b, c}.

Aşadar mulţimea A = {a, b, c} are opţ submulţimi, dintre care: trei submulţimi cu câte un element, trei submulţimi cu câte două elemente, o submulţime cu trei elemente şi mulţimea vidă.

În continuare vom rezolva următoarea problemă:

Fiind dată o mulţime finită cu n elemente, să se calculeze numărul submulţimilor sale având fiecare câte k elemente.

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, unde $0 \le k \le n$, *se numesc* combinări de n elemente luate câte k.

Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează C_n^k, şi se citeşte „combinări de n luate câte k”.

Din exemplul de mai înainte rezultă:
$C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$,
iar $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$ (acesta este numărul tuturor submulţimilor mulţimii {a, b, c}).

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.
Observăm că C_n^0, = 1 deoarece fiecare mulţime A are numai o submulţime fără nici un element şi anume mulţimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulţime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ are exact n submulţimi cu un singur element, adică submulţimile de forma $\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}$. Formula care exprimă C_n^k în funcţie de n şi k, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1. Dacă k şi n sunt numere naturale, astfel încît $0 \le k \le n$, atunci

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \qquad (1)$$

Demonstraţie. Fie A o mulţime cu n elemente. Să considerăm toate submulţimile mulţimii A care au k elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile. Obţinem astfel, toate submulţimile ordonate ale lui A, care au câte k elemente. Numărul lor, după cum ştim, este A_n^k. Dar cum numărul tuturor submulţimilor lui A avînd k elemente este egal cu C_n^k, iar fiecare din acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \bullet P_k$. Din această egalitate rezultă că

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

Înlocuind în această formulă expresiile $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obţinem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

De exemplu,

$$C_{25}^4 = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 25\cdot 23\cdot 22 = 12650$$

Exemple

1) În cîte moduri se poate alcătui din 9 persoane o comisie formată din 5 membri?
Soluţie. Pentru a avea toate cazurile posibile trebuie să considerăm toate submulţimile formate din câte 5 elemente, ale unei mulţimi formate din 9 elemente. Numărul căutat este

$$C_9^5 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 126$$

2) La un turneu de şah au participat n şahişti, şi fiecare 2 şahişti s-au întâlnit o dată. Câte partide s-au jucat în turneu?
Soluţie. Numărul partidelor este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

3) Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.
Soluţie. Vârfurile poligonului formează o mulţime de n puncte în plan, necoliniare câte 3. Numărul diagonalelor şi al laturilor poligonului este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Scăzînd cele n laturi din acest număr, obţinem:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

care reprezintă numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

4) În cîte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?
Soluţie. Fiecărui punct de intersecţie a două diagonale îi corespund 4 vârfuri ale poligonului, iar la oricare 4 vârfuri ale poligonului le corespunde un punct de intersecţie (punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în cele 4 puncte). De aceea numărul tuturor punctelor de intersecţie este egal cu numărul posibilităţilor de a alege 4 vârfuri din cele n vârfuri, adică:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

2. *Câteva proprietăţi ale numerelor* C_n^k

Numerele C_n^k au o serie de proprietăţi importante. Ele exprimă diferite relaţii între submulţimile unei mulţimi. Aceste proprietăţi se pot demonstra direct din formula pentru C_n^k. Mai instructive sunt însă demonstraţiile bazate pe raţionamente cu mulţimi.

1° *Formula combinărilor complementare. Dacă* $0 \le k \le n$, *atunci* este *adevărată egalitatea:*

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (1)$$

Demonstraţie. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}$$

Sensul acestei afirmaţii este următorul. Fie A o mulţime cu n elemente. Fiecărei submulţimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulţime bine determinată, cu *(n - k)* elemente, a mulţimii A, şi anume CX (complementara lui X). Prin această asociere, unei submulţimi cu *(n - k)* elemente îi corespunde o singură submulţime cu k elemente. Aşadar, numărul submulţimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulţimilor sale cu *(n - k)* elemente. Această afirmaţie se exprima, de altfel, prin egalitatea (1).

2° *Pentru orice număr natural* $n \geq 0$ *este adevărată egalitatea*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \qquad (2)$$

Demonstraţie. Suma din membrul stîng al egalităţii reprezintă tocmai numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu *n* elemente. Egalitatea (2) rezultă din teorema următoare:

Teorema 2. Numărul tuturor submulţimiior unei mulţimi formate din *n* elemente este egal cu 2^n.

Demonstraţie. Vom aplica metoda inducţiei matematice. Să notăm cu *P(n)* afirmaţia teoremei.

1) Afirmaţia *P(n)* este adevărată pentru $n = 0$, deoarece mulţimea vidă are o singură submulţime şi anume ea însăşi.

2) Să demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică din aceea că o mulţime formată din *k* elemente are 2^k submulţimi rezultă că o mulţime formată din $k + 1$ elemente are 2^{k+1} submulţimi.

Fie o mulţime *B* formată din $k+ 1$ elemente:

$B = \{b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}\}$ şi fie următoarea submulţime a lui *B:*

$B' = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$.

Cum *P(k)* este adevărată, rezultă că *B'* are 2^k submulţimi. Din fiecare submulţime a lui *B'* se obţine o nouă submulţime a lui *B* prin adăugarea elementului b_{k+1}, deci se obţin astfel, încă 2^k submulţimi ale lui *B.* În total sunt deci $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ submulţimi ale mulţimii B. Conform metodei inducţiei matematice teorema este demonstrată.

3° *Formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări. Pentru orice k* şi *n astfel încât* $0 \leq k < n$, *este adevărată egalitatea:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad (3)$$

Demonstraţie. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}$$

Înlocuind aceste valori în partea din dreapta a formulei (3) obţinem

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Egalitatea (3) este demonstrată,

Să dăm o altă demonstraţie formulei (3) făcînd un raţionament cu mulţimi. Să considerăm un element oarecare *a* al unei mulţimi *A,* formată din *n* elemente şi toate submulţimile mulţimii *A,* formate din câte *k* elemente. Numărul acestor submulţimi este egal cu C_n^k. Submulţimile cu *k* elemente ale lui *A* le împărţim în două clase (disjuncte): submulţimi care conţin pe *a* şi submulţimi care nu conţin pe *a.* Numărul submulţimilor din prima clasă este egal cu C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulţime se obţine prin adăugarea elementului *a* la o submulţime oarecare cu (*k* - 1) elemente, a mulţimii *A.* Numărul submulţimilor din a doua clasă este egal cu C_{n-1}^k deoarece fiecare astfel de submulţime este o submulţime cu *k* elemente, a mulţimii *A* - {*a*}. Deci:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$