Trei probleme interesante

Prof. COZMA CIPRIAN IOAN
Liceul Tehnologic”Dr. F. Ulmeanu”, Ulmeni, Maramureş

PROBLEMA 1

Să se arate că oricare ar fi x,y,z>0 şi $\sqrt{xyz}$ >2 are loc egalitatea:

$$\frac{\sqrt{\frac{xyz+4}{x}-4\sqrt{\frac{yz}{x}}}}{\sqrt{xyz}-2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Soluţie:

Fie $A=\frac{xyz+4}{x}$ şi $B=\frac{16yz}{x}$

Folosim formula de transformare a radicalilor dubli:

$$C=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{\frac{(xyz+4)}{x^2}-\frac{16yz}{x}}=\sqrt{\frac{x^2y^2z^2+8xyz+16-16xyz}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2y^2z^2-8xyz+16}{x^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{xyz-4}{x}\right)}=\frac{xyz-4}{x}$$

Cum $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+B}{2}}-\sqrt{\frac{A-B}{2}}$ obţinem:

$$\sqrt{\frac{xyz+4}{x}-4\sqrt{\frac{yz}{x}}}=\sqrt{\frac{\frac{xyz+4}{x}+\frac{xyz-4}{x}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{xyz+4}{x}-\frac{xyz-4}{x}}{2}}=\sqrt{yz}-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Obţinem astfel:

$$\frac{\sqrt{\frac{xyz+4}{x}-4\sqrt{\frac{yz}{x}}}}{\sqrt{xyz}-2}=\frac{\sqrt{yz}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{xyz}-2}=\frac{\frac{\sqrt{xyz}-2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{xyz}-2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$, de unde avem egalitatea din enunţ.

PROBLEMA 2

Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8$$

Soluţie:

Observăm că $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$

Vom nota $\sqrt{4+\sqrt{15}}=t\Rightarrow\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{t}$

Ecuaţia devine: $t^x+\frac{1}{t^x}=8$

Notăm din nou $t^x=y$ şi obţinem $y+\frac{1}{y}=8$, de unde $y^2-8y+1=0$

Cu soluţiile $y_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$

Revenim la ultima notaţie făcută şi avem:

$y_1 = 4+\sqrt{15} \Leftrightarrow t^x = 4+\sqrt{15} \Leftrightarrow \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 4+\sqrt{15} \Leftrightarrow x = 2$

$y_2 = 4-\sqrt{15} \Leftrightarrow t^x = 4-\sqrt{15} \Leftrightarrow \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 4-\sqrt{15} \Leftrightarrow x = -2$

Avem aşadar $S = \{\pm 2\}$

PROBLEMA 3

Arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+\frac{1}{103^2}+...+\frac{1}{2019^2}<0{,}01$$

Soluţie:

Avem $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}, \forall k \in N^*$ (1)

Dar $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \forall k \in N^*$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \forall k \in N^*$ (3)

Dăm pe rând lui k valorile 100, 101, 102, ...,2018 în relaţia (3) şi obţinem:

$$\frac{1}{101^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$

$$\frac{1}{102^2}<\frac{1}{101}-\frac{1}{102}$$

$$\frac{1}{103^2}<\frac{1}{102}-\frac{1}{103}$$

…………………

$$\frac{1}{2019^2}<\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}$$

Adunând membru cu membru inegalităţile de mai sus obţinem:

$\frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+\frac{1}{103^2}+...+\frac{1}{2019^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{2019}<\frac{1}{100}=0{,}01$,de unde rezultatul dorit.