“SUB ZODIA LUI 2019”

Profesor: COZMA CIPRIAN IOAN
LICEUL TEHNOLOGIC “DR. F. ULMEANU”
ULMENI, MARAMUREŞ

Problema 1:

Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+2019} + b^{n+2019}}$ unde $a,b>0$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Soluţie:
Avem 3 cazuri:

1) Dacă $a = b \Rightarrow x_n = \dfrac{2a^n}{2a^{n+2019}} = \dfrac{1}{a^{2019}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a^{2019}}$.

2) Dacă $a < b \Rightarrow x_n = \dfrac{b^n\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1\right)}{b^{n+2019}\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+2019} + 1\right)} = \dfrac{1}{b^{2019}} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+2019} + 1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{b^{2019}}$.

3) Dacă $a > b \Rightarrow x_n = \dfrac{a^n\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n\right)}{a^{n+2019}\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+2019}\right)} = \dfrac{1}{a^{2019}} \cdot \dfrac{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+2019}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a_{2019}}$,

Deci avem: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a^{2019}}$ dacă $a \geq b$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{b^{2019}}$ dacă $a < b$.

Problema 2:

Fie funcţia f:R$\to$R , f(x)= $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^{2n+4}}{2018x^{2n} + 2019^{2n}}}$.
Determinaţi domeniul de continuitate al funcţiei f .

Soluţie:

Avem: f(x)= $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^{2n+4}}{2018x^{2n} + 2019^{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^{2n} \cdot x^4}{x^{2n} \cdot \left(2018 + \left(\dfrac{2019}{x}\right)^{2n}\right)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2018 + \left(\dfrac{2019}{x}\right)^{2n}}}$

Se disting următoarele cazuri:

1) Dacă $|x| < 2019 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in (-2019;2019) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2018+\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n}}} = 0$$

$\Rightarrow$ f(x)=0 .

2) Dacă $|x| = 2019 \Leftrightarrow x = \pm 2019 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2018+\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n}}} =$

$= \frac{2019^2}{\sqrt{2019}} = 2019\sqrt{2019} \Rightarrow$ f(x)= $2019\sqrt{2019}$.

3) Dacă $|x| > 2019 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2019) \cup (2019;+\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2018+\left(\frac{2019}{x}\right)^{2n}}} = \frac{x^2}{\sqrt{2018}} = \frac{x^2\sqrt{2018}}{2018} \Rightarrow$ f(x)= $\frac{x^2\sqrt{2018}}{2018}$.

Avem deci, f(x)= $\begin{cases} \frac{x^2\sqrt{2018}}{2018}, x \in (-\infty;-2019) \\ 2019\sqrt{2019}, x = -2019 \\ 0, x \in (-2019;2019) \\ 2019\sqrt{2019}, x = 2019 \\ \frac{x^2\sqrt{2019}}{2019}, x \in (2019;+\infty) \end{cases}$

Studiem acum continuitatea funcţiei f.
Evident, f este continuă pe $(-\infty;-2019) \cup (-2019;2019) \cup (2019;+\infty)$ (funcţii elementare).
Studiem continuitatea funcţiei f în punctele $x = -2019$ şi $x = 2019$.

$l_s(-2019) = \lim_{\substack{x\to -2019 \\ x<-2019}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2019 \\ x<-2019}} \frac{x^2\sqrt{2018}}{2018} = \frac{2019^2\sqrt{2018}}{2018}$

$l_d(-2019) = \lim_{\substack{x\to -2019 \\ x>-2019}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2019 \\ x>-2019}} 0 = 0$,de unde ne rezultă că f este discontinuă în punctul $x = -2019$

Analog $l_s(2019) = 0$ şi $l_d(2019) = \frac{2019^2\sqrt{2018}}{2018}$, de unde aflăm că f este discontinuă şi în punctul $x = 2019$.
Am obţinut că f este continuă pe $R - \{\pm 2019\}$.