Ecuaţii cu rădăcini multiple

Prof. Adela Terezia Pop, Colegiul Tehnic „Aurel Vlaicu”, Baia Mare

Să se determine parametrii reali m, n astfel încât ecuaţia $x^4-x^3-mx^2-x+n=0$ să aibă rădăcină dublă x=1 şi să se rezolve ecuaţia dată.

Metoda 1 Dacă x=1 este rădăcină dublă a polinomului $x^4-x^3-mx^2-x+n$, atunci acesta se divide prin $(x-1)^2$ şi deci restul împărţirii celor două polinoame este polinomul nul. Efectuând împărţirea avem egalitatea

$$x^4-x^3-mx^2-x+n=(x^2-2x+1)(x^2+x+1-n)-2mx+n+m-1$$

Restul fiind polinomul nul, adică $-2mx+n+m-1=0$ dă m=0 şi n+m-1=0, adică m=0 şi n=1.

Celelalte rădăcini ale ecuaţiei sunt soluţii (câtul egal cu zero) ale ecuaţiei $x^2+x+1=0$, adică

$$\mathbf{x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}}.$$

Metoda 2 (schema lui Horner)

În schema lu Horner cerem ca x=1 să fie rădăcină dublă când avem:

	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	-1	-m	-1	n
1	1	0	-m	-m-1	-m+n-1=0
1	1	1	1-m	-2m=0	

Deci $-m+n-1=0$ şi $-m=0$ dau m=0 şi n=1, iar celelalte rădăcini ale ecuaţiei date coincid cu ale câtului $x^2+x+1=0$.

Metoda 3 (metoda identificării). Dacă x=1 este rădăcină dublă a ecuaţiei atunci trebuie să avem egalitatea : $x^4-x^3-mx^2-x+n=(x^2-2x+1)(x^2+\alpha\beta+\beta)$.

De aici prin identificare rezultă sistemul:

$$\left|\begin{array}{l} -1=\alpha-2 \\ -m=\beta-2\alpha+1 \\ -1=\alpha-2\beta \\ n=\beta \end{array}\right.$$

Din prima şi a treia ecuaţie rezultă $\alpha=1$, $\beta=1$. Acum din celelalte ecuaţii se obţine m=0, n=1. Acum ecuaţia se scrie $(x^2-2x+1)(x^2+x+1)=0$.

Celelalte două rădăcini sunt date de rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$, adică $x_{3,4}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Metoda 4 (metoda reducerilor succesive)

Dacă $P=x^2-2x+1$, $Q=x^4-x^3-mx^2-x+n$, atunci cel mai mare divizor comun dintre P şi Q trebuie să fie P.

De asemenea şi polinomul $R=Q-x^2P$ se va divide prin P. Avem: $R=x^3-(1+m)x^2-x+n$. De asemenea şi polinomul $S=R-xP=(1-m)x^2-2x+n$ se va divide prin P. Cum S şi P au acelaşi grad şi S se divide prin P rezultă că ele au aceleaşi rădăcini.

Condiţia ca două polinoame $P_1=a_1x^2+b_1x+c_1$, $P_2=a_2x^2+b_2x+c_2$ să aibă aceleaşi rădăcini este aceea de proporţionalitate a coeficienţilor termenilor de acelaşi grad

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ (relaţii ce rezultă uşor din relaţiile lui Viéte $x_1+x_2=-\dfrac{b_1}{a_1}=-\dfrac{b_2}{a_2}$, $x_1x_2=\dfrac{c_1}{a_1}=\dfrac{c_2}{a_2}$).

În cazul nostru $\dfrac{1-m}{m}=1=\dfrac{n}{1}$. De aici m=0, n=1.

Metoda 5. (relaţiile lui Viéte). Din enunţ $x_1=x_2=1$. Având o relaţie între rădăcini vom asocia acesteia relaţiile lui Viéte pentru o ecuaţie şi avem

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4 0=1 \\ (x_1+x_2)x_1x_2+x_1x_2(x_3+x_4)=1 \\ x_1x_2x_3x_4=n \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x_3+x_4=-1 \\ x_3x_4=1-m \\ x_3x_4=1 \\ x_3x_4=n \end{cases}$$

Din relaţiile a doua şi a treia rezultă 1-m=1, adică m=0, iar din a doua şi a patra n=1-m=1. Pentru a găsi rădăcinile x_3, x_4 se rezolva sistemul $x_3+x_4=-1$, $x_3x_4=1$, adică ecuaţia $x^2+x+1=0$, când $\mathbf{x_{3,4}} = \frac{\mathbf{-1 \pm i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$.

Metoda 6. (cu ajutorul derivatelor). Dacă $f \in \mathbf{R}[X]$ care are $x=x_0$ rădăcină dublă, atunci $f'(x_0)=f(x_0)=0$.

În cazul nostru $f'(x)=4x^3-3x^2-2mx-1$. Din $f'(1)=0$ rezultă m=0, iar din $f(1)=0$ rezultă n=1.

Pentru determinarea celorlalte rădăcini se scrie ecuaţia $x^3(x-1)-(x-1)=0$, adică $(x-1)(x-1)(x^2+x+1)=0$, de aici x^2+x+1, adică $\mathbf{x_{3,4}} = \frac{\mathbf{-1 \pm i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$.