Maxime şi minime pentru funcţii de două variabile

- Studiu de specialitate –

Prof. Adela Terezia Pop, Colegiul Tehnic „Aurel Vlaicu”, Baia Mare

Definiţie Fie $f(x,y)$ o funcţie reală de două variabile, definită pe o mulţime $X \subset \mathbf{R}^2$.

1) Un punct $(a,b) \in X$ se numeşte punct de minim al funcţiei $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încât pentru orice $(x,y) \in V \cap X$ are loc inegalitatea $f(x,y) \geq f(a,b)$.
2) Un punct $(a,b) \in X$ se numeşte punct de maxim al funcţiei $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încât pentru orice $(x,y) \in V \cap X$ are loc inegalitatea $f(x,y) \leq f(a,b)$.

Maximele sau minimele definte mai sus sunt maxime sau minime locale sau relative.

Teoremă Fie $f(x,y)$ o funcţie reală de două variabile, definită pe o mulţime $X \subset \mathbf{R}^2$ şi (a,b) un punct interior lui X. Dacă:

a) (a,b) este punct de extrem al funcţiei $f(x,y)$.

b) funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul întâi în punctul (a,b),

atunci derivatele parţiale se anulează în punctul (a,b), adică $f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0$.

Observaţii

a) Într-un punct de extrem (a,b) avem $f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0$; prin urmare diferenţiala $df(a,b)=0$.

b) Reciproca teoremei de mai sus nu este în general adevărată; dacă într-un punct (a,b) avem $f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0$ nu rezultă cu necesitate că punctul (a,b) este punct de extrem.

Un punct (a,b) pentru care diferenţiala $df(a,b)=0$ sau în mod echivalent $f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0$, se numeşte punct staţionar.

c) Din teorema de mai sus rezultă că punctele de extrem se găsesc printre soluţiile sistemului $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$, însă nu toate soluţiile sistemului sunt puncte de extrem.

Ca să putem decide care dintre punctele staţionare sunt puncte de extrem , trebuie să ţinem seama şi de derivatele parţiale de ordinul doi.

Teoremă Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile, definită pe $X \subset \mathbf{R}^2$, derivabilă parţial de trei ori pe X. Fie (a,b) o soluţie a sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1) Dacă în punctul (a,b) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ atunci punctul (a,b) este punct de minim al funcţiei $f(x, y)$.
2) Dacă în punctul (a,b) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ atunci punctul (a,b) este punct de maxim al funcţiei $f(x, y)$.
3) Dacă în punctul (a,b) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$ atunci punctul (a,b) nu este punct de extrem al funcţiei $f(x, y)$.

Observaţii

1) Dacă $rt - s^2 = 0$ atunci nu putem afirma despre punctul (a,b) că este sau nu punct de extrem pentru funcţia $f(x, y)$.

Într-adevăr expresia E se mai poate scrie pentru $r \neq 0$ astfel:

$$E = \frac{1}{2r}(rt - s^2)(y-b)^2 + \frac{1}{2r}\left[s \cdot (y-b) + r \cdot (x-a)\right]^2.$$

Prin urmare dacă $rt - s^2 = 0$, pentru $s \cdot (y-b) + r \cdot (x-a) = 0, x \neq a, y \neq b$ avem că $E = 0$, deci semnul difereţei $f(x, y) - f(a,b)$ depinde de valorile derivatelor parţiale de ordin superior lui doi.

2) În teoremă condiţia $r > 0$ (sau $r < 0$) se poate înlocui cu $t > 0$ (sau $t < 0$), aşa cum rezultă din demonstraţie.

Exemplul 1 Să se determine extremele funcţiei: $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; x > 0, y > 0$

Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{50}{x^2} \\ x = \dfrac{20}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 125 \\ y = \dfrac{2x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (5,2) este punct staţionar.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{100}{x^3}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{40}{y^3}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow$ În punctul staţionar (5, 2) avem:

$$r = \frac{\partial^2 f(5,2)}{\partial x^2} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}, \qquad s = \frac{\partial^2 f(5,2)}{\partial x \partial y} = 1, \qquad t = \frac{\partial^2 f(5,2)}{\partial y^2} = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow$$

$rt - s^2 = \dfrac{4}{5} \cdot 5 - 1 = 3 > 0, r = \dfrac{4}{5} > 0 \Rightarrow (5,2)$ este punct de minim al funcţiei $f(x,y)$

şi $f_{\min}(x,y) = f(5,2) = 30$.

Exemplul 2 Să se determine extremele funcţiei: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot y^2 - 3x.$$

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} sau \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ punctele staţionare sunt $(0,0)$ şi

(1,1).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

În punctul (0, 0) obţinem $rt - s^2 = -9 < 0 \Rightarrow$ (0,0) nu este punct de extrem.

În punctul (1, 1) obţinem $rt - s^2 27 > 0$ şi $r = 6 > 0 \Rightarrow (1,1)$ este punct de minim local al funcţie $f(x,y)$.

Bibliografie

[1] Roşculeţ M. , Analiză matematică , Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1966.

[2] Andrica D. , Duca D. , Purdea I. , Matematică de bază , Editura Studium, Cluj Napoca 2000.